

# PROBLÉM SPRÁVNEJ A EXAKTNEJ DEFINÍCIE GEOMETRICKÝCH FORIEM GEORELIÉFU VZHLADOM NA TIAŽOVÉ POLE ZEME

Jozef Krcho, Alexandra Benová\*

\* Univerzity Komenského v Bratislave, Prírodovedecká fakulta, Katedra kartografie, geoinformatiky  
a diaľkového priesumu Zeme, 842 15 Bratislava, Mlynská dolina 1,  
krcho@fns.uniba.sk, benova@fns.uniba.sk

## The problem of correct and exact definition of geometrical forms of georelief regarding the Earth's gravitational field

Expression of the convexity and concavity of georelief geometric forms is critically analysed. The meaning of signs ( $\pm$ ) in mathematical formulas for the ordered couple of normal curvatures  $[(K_N)_n; (K_N)_l]$ , which represents the basis of classification of geometric forms is considered. The problem of signs ( $\pm$ ) is analysed: a) from the purely mathematical point of view, b) from the physical point of view, in which georelief and the course of processes in the gravitational field of Earth are considered for the formation of geometric forms. It shows the correctness of both viewpoints, but the consequences for classification of these forms from the geomorphological point of view are also exposed.

**Key words:** altitude gradient  $\text{grad } z$  a  $-\text{grad } z$ , gravitational field of Earth, gradient of potential energy ( $\text{grad } W_p$ ), gradient of kinetic energy ( $\text{grad } W_k$ ) in altitude field, profile curvatures  $(K_N)_n$ ,  $(K_N)_l$ , plan curvature  $K_r$ , normal forms  $F_n$ ,  $F_l$ , total geometric forms of georelief  $F$

## ÚVOD – VSTUP DO PROBLÉMU

Predložená práca je *reakciou* na rozdielnu interpretáciu geometrických foriem georeliéfu v niektorých GIS-technológiách v časti odbornej literatúry, ako aj na dôsledky, ktoré z toho vyplývajú. Tieto významové rozdiely v podstate spočívajú v zásadne protichodnej interpretácii konvexnosti a konkávnosti týchto foriem, založenej na dvoch odlišných, aj keď v princípe správnych hľadiskách.

Prvým a) je čisto matematické hľadisko; geometria plôch, v našom prípade geometria georeliéfu, je v ňom definovaná len na základe striktných matematických kritérií diferenciálnej geometrie. Vektor normály  $\mathbf{N}$  k ploche je v tomto prípade v každom jej bode orientovaný na „vnútornú“ stranu plochy a výškový gradient  $\text{grad } z$  je v každom jemu zodpovedajúcom bode v skalárnej báze skalárneho poľa orientovaný na stranu stúpajúceho skalára  $z$ . V prípade georeliéfu ako hladkej plochy to znamená definovanie jeho foriem vzhľadom na jeho „vnútornú“ stranu a ich interpretáciu iba na základe týchto kritérií; o pôsobení tiažového poľa Zeme na smer procesov nie je uvažované.

Druhým b) je hľadiskom fyzikálne, presnejšie geofyzikálne zamerané hľadisko. Tak isto dôsledne narába s aparátom diferenciálnej geometrie, pričom zároveň o georeliéfe ako ploche uvažuje v tiažovom poli Zeme a o smere jeho pôsobenia na eróznodenudačné procesy z vyššej geopotenciálnej hladiny na nižšiu. Tieto procesy sú v smere spádových kriviek generované na „vonkajšej“

strane georeliéfu zmenou potenciálnej energie na kinetickú energiu na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Vektor normály  $\mathbf{N}$  je preto vzhľadom na kinetickú energiu procesov a smer jej pôsobenia v tiažovom poli oproti hľadisku a) orientovaný na georeliéfe opačne, na jeho „vonkajšiu“ stranu a výškový gradient grad  $z$  je v skalárnej báze  $(x, y)$  orientovaný na spádniciach taktiež opačne, teda v smere toku na stranu klesajúceho skalára  $z$ .

Formy georeliéfu definované a interpretované z hľadiska a) majú oproti hľadisku b) opačné znamienka a sú teda definované presne opačne. Geometrické formy definované z hľadiska a) ako konvexné sú z hľadiska b) definované ako konkávne a konkávne sú definované ako konvexné. Opačná orientácia vektora normály  $\mathbf{N}$  k ploche a orientácia grad  $z$  v jej skalárnej báze majú preto pri definícii geometrických foriem georeliéfu zásadný význam, čo v časti odbornej literatúry a GIS-technológii nie je zohľadňované.

Aparát exaktnej geomorfometrie, vrátane klasifikácie geometrických foriem georeliéfu, bol v prácach Šalamona (1963a a 1963b), Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1986 a 1990) a Evansa (1972) vyjadrený z druhého hľadiska (b). V nadväznosti na uvedené práce je preto teraz analyzovaný a vysvetlený problém pôvodnej exaktnej, fyzikálne zameranej definície normálových, horizontálnych a celkových foriem georeliéfu.

Geomorfometrická interpretácia geometrických foriem formulovaná čisto z matematického hľadiska je síce formálne striktné korektná, avšak v geomorfológii je z hľadiska priebehu exogénnych procesov na „vonkajšej“ strane georeliéfu a ich orientácie v tiažovom poli Zeme z vyššej ekvipotenciálnej hladiny na nižšiu fyzikálne významovo zavádzajúca. Vedie tak k významným protichodným interpretačným rozdielom, na ktoré je potrebné znovu poukázať.

Napríklad výpočet normálových krivostí a geometrických foriem georeliéfu dáva SURFER oproti ArcGIS-u a GRASS-u s opačnými znamienkami. SURFER vychádza z kritérií bodu a), kým ArcGIS a GRASS výsledne správne zohľadňujú kritéria bodu b). Ukážeme však, že aj hľadisko a) má vzhľadom na potenciálnu energiu svoj fyzikálny aspekt, avšak z hľadiska geometrických foriem georeliéfu má inú interpretáciu.

## STRUČNÝ HISTORICKÝ EXKURZ VÝVOJA PROBLÉMU

Vychádzajúc z prác Šalamona (1961, 1963a a 1963b) bola v rokoch 1964 až 1973 v bývalej ČSSR vzhľadom na tiažové pole Zeme postupne exaktne formulovaná množina morfometrických veličín georeliéfu, vrátane jeho geometrických foriem (Krcho 1964a, 1964b, 1973, 1986, 1990 a 2001). Gradienty výšok výškového poľa boli teda oproti čisto matematickým kritériám vzhľadom na tiažové pole orientované opačne, na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Pôvodné výsledky boli v nich zároveň po prvýkrát aj kartograficky dokumentované na vybraných územiach Košickej kotliny a Malých Karpát (Krcho 1964a a 1964b). Táto množina bola v nasledujúcich prácach postupne rozšírená o ďalšie veličiny a bola označená symbolom  $G_{RF}$  (Krcho 1973, 1986, 1990 a 2001).

V rokoch 1965 až 1969 a v nasledujúcich rokoch boli vzhľadom na smer pôsobenia tiažového poľa Zeme osobitne odvodené vzťahy pre dvojicu normálových krivostí  $(K_N)_n \equiv \omega$  (normálová krivosť v smere dotýčnice ku spádnici),

$(K_N)_t$  – normálová krivosť v smere dotyčnice k vrstevnici a vzťah pre horizontálnu krivosť georeliéfu  $K_r$ , takže na ich pravej strane boli predradené znamienka (–). Keďže pôvodne bola normálová krivosť v smere spádových kriviek označená symbolom  $\omega$ , v neskorších prácach ako  $(K_N)_n$ , vzhľadom na kontinuitu významu používame symbol  $(K_N)_n \equiv \omega$ . Na základe týchto vzťahov boli odvodené vzťahy pre celkové geometrické formy georeliéfu.

V súvislosti s tým boli z uvedenej trojice krivostí  $(K_N)_n \equiv \omega$ ,  $(K_N)_t$ ,  $K_r$  vyjadrené dve usporiadané dvojice  $[(K_N)_n \equiv \omega, (K_N)_t]$ ,  $[(K_N)_n \equiv \omega, K_r]$ , na základe ktorých bol formulovaný abstraktný 2D priestor v súradnicovej sústave  $\langle O; \langle (K_N)_n \equiv \omega, (K_N)_t \rangle$  a  $\langle O; \langle (K_N)_n \equiv \omega, K_r \rangle$  ako geomorfometrický základ pre exaktnú definíciu a klasifikáciu celkových foriem v tiažovom poli Zeme (Krcho 1973, 1986, 1990 a 2001). Analogicky, so zohľadnením gravitačného poľa, definovali krivosti (a ďalšie morfometrické charakteristiky) aj iní autori (napr. Evans 1972, Shary 1995, Shary et al. 2002 a Schmidt et al. 2003).

*Zavedenie presných fyzikálnych kritérií spojených s dôslednou zmenou znamienok však oproti rýdzo matematickým kritériám zároveň znamenalo dôslednú zmenu interpretácie geometrických foriem.*

Význam záporných znamienok (–) vo vzťahoch pre normálové krivosti a horizontálnu krivosť z prác Krcha (1973, 1986, 1990 a 2001) nebol však v niektorých prácach novej literatúry zohľadnený. Tieto vzťahy boli dodatočne odvodené iba na základe čisto matematických kritérií diferenciálnej geometrie, teda na ich pravej strane s kladnými znamienkami (+), napr. Mitášová a Hofierka (1993). Pôvodná, fyzikálne uvažovaná definícia geometrických foriem (Krcho 1973) bola pritom v úplnej zhode s definíciou klasickej empirickej geomorfológie. Klasická empirická geomorfológia tak intuitívne úplne správne obsiahla ich fyzikálny aspekt.

Od začiatku deväťdesiatych rokov sa začínajú v geomorfometrii definovať a používať aj morfometrické veličiny tretieho rádu – zmeny krivostí (Shary a Stepanov 1991, Jenčo 1992/1993, Minár 1992 a 1999, Krcho a Benová 2004, Minár a Evans 2008, Florinsky 2009, Jenčo et al. 2009 a Minár et al. 2013a). Nekonzistencia v definovaní krivostí sa pritom nutne prejaví aj v definícii zmeny krivostí, keď veličiny tretieho rádu definované pomocou čisto matematického hľadiska sa od tých istých veličín definovaných geofyzikálne opäť líšia znamienkom (napr. Jenčo et al. 2009 versus Minár 1999). Na túto nekonzistenciu bolo poukázané v práci Minár et al. (2013b), pričom definičné rovnice všetkých veličín tretieho rádu tu boli zjednotené v zmysle geofyzikálneho hľadiska.

V súčasných GIS-technológiách sú síce geomorfometrické výstupy už bežným štandardom, avšak v niektorých už spomenutých prípadoch aj s opačnými znamienkami, a teda s významovo protichodnými výstupmi. Na niektoré významné z nich poukážeme.

V nadväznosti na práce Evansa (1972), Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1986, 1990 a 1992/1993) znovu stručne, avšak čo najdôkladnejšie vyjadríme *podstatu pôvodnej interpretácie geometrických foriem georeliéfu a jeho geometrickej štruktúry, formulovanú vzhľadom na tiažové pole Zeme.*

## GEORELIÉF MODELOVANÝ AKO HLADKÁ CELOPLANETÁRNA TOPOGRAFICKÁ PLOCHA A JEJ POŽADOVANÉ VLASTNOSTI

Georeliéf a jeho geometrická štruktúra je celoplanetárna dynamická plocha. Vo vedeckých prácach, ako aj v GIS-technológiách je však prevažne modelovaný v kartézskej súradnicovej sústave  $\langle O, x, y, z \rangle$  kartografického zobrazovacieho priestoru ako hladká statická plocha bez parametra času  $T$ . Vyjadrená je skratkou TPG – topografická plocha georeliéfu. Geomorfometricky bol taktiež študovaný aj z fyzikálneho aspektu v tiažovom poli Zeme (Šalamon 1963a a 1963b, Evans 1972, Krcho 1964a, 1964b a 1973).

V kartografickom zobrazovacom 3D priestore ho teda možno vyjadriť v mierke  $1:M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) ako hladkú statickú TPG, opísanú v kartézskej súradnicovej sústave  $\langle O, x, y, z \rangle$  funkciou dvoch premenných bez parametra času  $T$ , vo všeobecnom tvare

$$z = f(x, y); \text{ resp. } z = z(x, y). \quad (1)$$

V tomto tvare je TPG obsiahnutá aj v súčasných GIS-technológiách vo forme digitálnych modelov (DMR), vždy v nejakej mierke  $1:M_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) a jej zodpovedajúcej rozlišovacej úrovni  $U_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) bez parametra času  $T$ , pričom však nie vždy je zároveň vyjadrená aj vzhľadom na tiažové pole Zeme.

Aby však *funkcia* (1) mohla úplne správne vyjadriť georeliéf a jeho geometrickú štruktúru, *musí mať* v zhode s prácami Šalamona (1961, 1963a a 1963b) a v nadväznosti na ne Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1990, 1992/1993 a 2001) *nasledovné základné vlastnosti*:

a) musí v mierke  $1:M_i$  bez parametra času  $T$  presne opisovať TPG a jej priebeh ako hladkú statickú plochu,

b) musí byť spojitá diferencovateľná a rozvinuteľná do Taylorovho radu,

c) musí byť zároveň zasadená do tiažového poľa Zeme, takže každému hmotnému bodu  $A_i$  na TPG o hmotnosti  $m$  je priradená potenciálna energia  $W_{p,i}$ , ktorá v každom  $i$ -tom singulárnom izolovanom bode pozitívnom  $A_{sg,i}$  (vo vrcholovom bode TPG) nadobúda maximálne hodnoty  $W_{p,max,i} \equiv W_{p,sg,i}$  a v najnižších bodoch oblasti zodpovedajúcej  $i$ -temu bodu  $A_i(x_i, y_i, z_{i,min})$  nadobúda minimálne hodnoty  $W_{p,min,i}$ .

*Poznámka 1.* Vo vzťahu pre potenciálnu energiu  $W_p = mgh$ , kde  $m$  – hmotnosť častice na TPG,  $g$  – gravitačné zrýchlenie,  $h$  – výška uvažovaná vo fyzike v smere normály  $N$  k nulovej hladine, výšku  $h$  z kartografického hľadiska aproximatívne uvažujeme ako jej zobrazenie z geoidu vzhľadom na normálu  $N$  k referenčnej ploche Zeme (RPZ). Ňou je buď rotačný elipsoid alebo guľová plocha. Po zobrazení do kartografického zobrazovacieho priestoru v kartézskej súradnicovej sústave  $\langle O; x, y, z \rangle$  daného zobrazovacími rovnicami  $x = f_1(\varphi, \lambda)$ ,  $y = f_2(\varphi, \lambda)$ ,  $z = f_3(h)$ , kde  $\varphi$  – zemepisná šírka,  $\lambda$  – zemepisná dĺžka, obrazom RPZ je rovina  $(x, y)$  a obrazmi normál  $N$  k RPZ sú súradnice  $z$ . Výšky  $z$  na TPG a jej skalárneho poľa, dané v kartografickom zobrazovacom priestore funkciou (1), sú teda obrazmi výšok  $h$ . Preto  $W_p = mgh$  sa v kartézskej súradnicovej sústave  $\langle O; x, y, z \rangle$  zobrazí ako  $W_p = mgz$ , čo vzhľadom na (1) možno vyjadriť tiež ako  $W_p = mg[f(x, y)]$ . *Koniec poznámky 1.*

Zavedenie podmienky c) umožnilo vyjadriť štruktúrne vlastnosti TPG vrátane geometrických foriem tak, aby okrem geometrického významu mali aj fyzikálny význam. Oproti čisto matematickému hľadisku sa však zavedením podmienky c), v dôsledku zmeny znamienok zásadne zmenili podmienky na definíciu a klasifikáciu geometrických foriem georeliéfu. Najprv budeme teda o TPG uvažovať bez tiažového poľa a potom v tiažovom poli.

Vlastnosti TPG a jej skalárneho poľa uvažovaného v kartézskej súradnicovej sústave  $\langle O, x, y, z \rangle$  bez tiažového poľa Zeme

Hladká TPG (1), je v súradnicovej ústave  $\langle O, x, y, z \rangle$  tvorená množinou bodov

$${}^*E_{RF} = \{ {}^*A_i(x_i, y_i, z_i) \}_{i \in I}, \quad (2a)$$

kde  $I$  je indexová množina a  $i = 1, 2, \dots$  je vhodne volený celočíselný identifikačný znak pre usporiadanú trojicu  $x_i, y_i, z_i$ , ktorej výška  $z_i$  je jednoznačne určená funkciou (1). Funkcia (1) je zároveň funkciou spojitého skalárneho poľa nadmorských výšok  $z$ , tvoreného v skalárnej báze  $(x, y)$  kartografického zobrazovacieho priestoru množinou bodov

$$E_{RF} = \{ A_i(x_i, y_i) \}_{i \in I}. \quad (2b)$$

V skalárnej báze  $(x, y)$  je tak funkciou (1) ku každému jej bodu  $A_i(x_i, y_i)$  jednoznačne priradená hodnota skalára  $z_i$ . Symbol  $I$  v (2b) vyjadruje indexovú množinu, pričom  $(i = 1, 2, \dots) \in I$  je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú dvojicu  $x_i, y_i$ , a  $k$  nej priradený skalár nadmorskej výšky  $z_i$ . Každému bodu  ${}^*A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  na TPG je tak v skalárnej báze  $(x, y)$  priradený bod  $A_i[(x_i, y_i) \mid z_i] \in E_{RF}$ .

Parciálne derivácie prvého a druhého rádu  $\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial^2 f / \partial x^2, \partial^2 f / \partial x \partial y, \partial^2 f / \partial y^2$  funkcie (1) označme v zhode s prácami Šalamona (1963a a 1963b) a Krcha (1964a, 1964b, 1973 a 1990) symbolmi v tvare

$$\partial f / \partial x \equiv z_x, \partial f / \partial y \equiv z_y, \partial^2 f / \partial x^2 \equiv z_{xx}, \partial^2 f / \partial x \partial y \equiv z_{xy}, \partial^2 f / \partial y^2 \equiv z_{yy}. \quad (2c)$$

V nadväznosti na tieto práce budeme preto v ďalšej časti textu pre parciálne derivácie prvého a druhého rádu používať symboly  $z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}$ .

Charakterizujme stručne najprv iba samotné základné matematické vlastnosti funkcie (1). Ak má výška  $z$  vo funkcii (1) význam premenného parametra  $C_z \langle (C_z)_d, (C_z)_h \rangle$ , kde  $(C_z)_d \equiv z_d$  je dolná hodnota výšky  $z$  a  $(C_z)_h \equiv z_h$  horná hodnota výšky  $z_h$ , potom funkcia (1) na danej oblasti vyjadruje spojitú izočiarovú (v našom prípade vrstevnicovú) pole na TPG a v jej skalárnej báze  $(x, y)$ . Toto izočiarové pole výšok má buď tvar

$$f(x, y) = C_z, \text{ resp. } z(x, y) = C_z, \quad (3a)$$

alebo diferenciálny tvar, vyjadrený vzhľadom na (2c) ako

$$z_x dx + z_y dy = 0. \quad (3b)$$

Pole ortogonálnych trajektórií (spádových kriviek) k vrstevnicovému poľu (3a), (3b) je potom určené rovnicou  $z_x dy + z_y dx = 0$ , ktorej riešením po vynásobení vhodným integračným faktorom  $\lambda(x, y)$  je jej exaktný tvar

$$z_x \lambda(x, y) dy + z_y \lambda(x, y) dx = d\Psi(x, y) = 0. \quad (3c)$$

Jej integrovaním dostaneme rovnicu  $\Psi(x, y) = d$ , ktorou je potom v skalárnej báze  $(x, y)$  k vrstevnicovému poľu (3a), (3b) priradená jednoparametrická

sústava ortogonálnych trajektórií. Izočiarovému (vrstevnicovému) poľu v skalárnej báze tak na TPG zodpovedá sústava spádových kriviek

$$\left\{ \begin{matrix} z = f(x, y) \\ \psi(x, y) = d \end{matrix} \right\}, \text{ resp. } \left\{ \begin{matrix} z = z(x, y) \\ \psi(x, y) = d \end{matrix} \right\}. \quad (3d)$$

Ortogonálna sieť kriviek (sieť vrstevníc a spádnic) je potom v skalárnej báze určená rovnicou

$$z_x z_y dy^2 + [z_x^2 - z_y^2] dx dy - z_x z_y dx^2 = 0, \quad (3e)$$

ktorej na TPG tak isto zodpovedá ortogonálna sieť vrstevníc a spádových kriviek, pričom spádové krivky do singulárnych izolovaných bodov pozitívnych (vrcholových bodov) vbiehajú. Nutnou a postačujúcou podmienkou na to, aby diferenciálnou rovnicou (3e) bola v skalárnej báze opísaná ortogonálna sieť kriviek je, aby pre diskriminant rovnice (3e) platilo

$$(z_x^2 - z_y^2)^2 + 4z_x^2 z_y^2 > 0,$$

(Šalamon 1963a a 1963b). Pre singulárne (ďalej len SG) body  $A_{sg,i}$  ( $i=1, 2, \dots$ ) výškového poľa (1) platí, že  $z_x = 0$ ,  $z_y = 0$ , pričom SG body trajektóriového (spádnicového) poľa sú totožné s SG bodmi výškového poľa, avšak majú v nich odlišné vlastnosti.

Každý SG izolovaný pozitívny bod (každý vrcholový bod na TPG) má pri tom svoj systém spádových kriviek, ktorý vždy tvorí jednu svoju singulárnu oblasť. Nazvime ju SG oblasťou. Žiadna spádová krivka teda neprechádza z jednej SG oblasti do druhej. *Spádové krivky každej SG oblasti za podmienok stanovených bez tiažového poľa tak do svojho SG bodu vždy vbiehajú* (Šalamon 1963a a 1963b). Vyjadrime teraz stručne fyzikálny aspekt problému TPG a jej skalárneho poľa (1), vyplývajúci z tretej uvedenej podmienky c).

Vlastnosti TPG a jej skalárneho poľa uvažovaného v tiažovom poli Zeme – fyzikálny aspekt problému

Z podmienky c) tretej kapitoly vyplýva, že v ortogonálnej sieti kriviek na TPG a v jej skalárnom poli ( $x, y$ ) sú vrstevnice (3a), (3b) v tiažovom poli Zeme pre každú jednu hodnotu parametra  $z_i = C_{z,i}$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) s istým stupňom aproximácie zároveň priesečnicami ekvipotenciálnych hladín s TPG. Sú teda v zmysle poznámky 1 zároveň aj izočiarami hmotných bodov s rovnakou potenciálnou energiou

$$W_{p,i} = mg[f(x, y) = C_z] = mg C_{z,i},$$

kde  $C_z$  je premenný výškový parameter (každej hodnote  $C_z$  zodpovedá vždy jedna vrstevnica).

Potenciálna energia  $W_{p,i} = mgz_i$  teda na stranu stúpajúceho skalára  $z$  (proti svahu  $z + dz$ ) vzrastá a po svahu, na stranu klesajúceho skalára  $z$ , t. j. ( $z - dz$ ) klesá, takže

$$[W_{p,i} = mgz_i < W_{p,i} = mg(z_i + dz)] \wedge [W_{p,i} = mgz_i > W_{p,i} = mg(z_i - dz)].$$

Spádové krivky sú potom na TPG v tejto sieti najkratšími spojnicami dvoch ekvipotenciálnych hladín medzi dvomi vrstevnicami  $C_z$ , a  $C_z - dC_z$  na stranu klesajúceho skalára  $z$ . *Priebeh spádovej krivky v smere klesajúceho skalára  $z$  o hodnotu  $-dz \equiv -dC_z$  vyjadruje teda najväčšiu záporne vzatú zmenu potenciálnej energie  $W_p$  o hodnotu  $-dW_p$  na vzdialenosť  $dn$ , teda  $(-dW_p/dn)$ . Zároveň však jej priebeh so záporne vzatou zmenou  $z$  o hodnotu  $-dz$  na vzdialenosť  $dn$  vyjadruje najväčší prírastok kinetickej energie  $W_{k,i}$  o hodnotu  $dW_{k,i}/dn$ . V tom spočíva základný fyzikálny význam výškového poľa v tiažovom poli Zeme, lebo eróznodenudačné procesy prebiehajú na ňom so zápornou zmenou skalára  $z$  o  $-dz$  v smere spádových kriviek, generované zmenou potenciálnej energie  $W_p$  na kinetickú energiu  $W_k$ . Od neho sa potom odvíja aj geometrická štruktúra a klasifikácia foriem georeliéfu.*

Z podmienky c) ďalej vyplýva, že najvyššia potenciálna energia  $W_{p,sg} = mgz_{sg}$  na TPG v každej jej SG oblasti sa nachádza v jej izolovanom SG bode pozitívnom  $*A_{sg,i}(x_i, y_i, z_{sg,i})$ , pričom v ňom je kinetická energia  $W_{k,sg} = 0$ . Vo všetkých ostatných bodoch príslušnej SG oblasti sa potenciálna energia so zväčšujúcim záporne vzatým rozdielom výšky

$$z_{sg,i} - z_i \text{ (kde } z_i < z_{sg,i})$$

na spádových krivkách znižuje a mení sa v smere spádových kriviek v každom ich bode  $*A_i(x_i, y_i, z_i)$  na kinetickú energiu

$$W_{k,i} = \frac{1}{2} m (gt_i)^2, \text{ kde } t_i = \sqrt{\frac{2(z_{sg,i} - z_i)}{g}}. \quad (3f)$$

Preto vzhľadom na parameter  $t_i$  je  $W_{k,i} = mgz_{sg,i} - mgz_i$ , kde  $z_i$  je dané funkciou (1), takže

$$W_{k,i} = mgz_{sg,i} - mg[f(x_i, y_i)]. \quad (3g)$$

So zápornou zmenou výšky  $z$  o  $-dz$  na úseku  $dn$  spádovej krivky teda kinetická energia  $W_{k,i}$  (3f) vzrastie a potenciálna energia  $W_{p,sg} = mgz_{sg}$  o túto hodnotu klesá na hodnotu

$$W_{p,i} = mgz_i \equiv mg[f(x_i, y_i)],$$

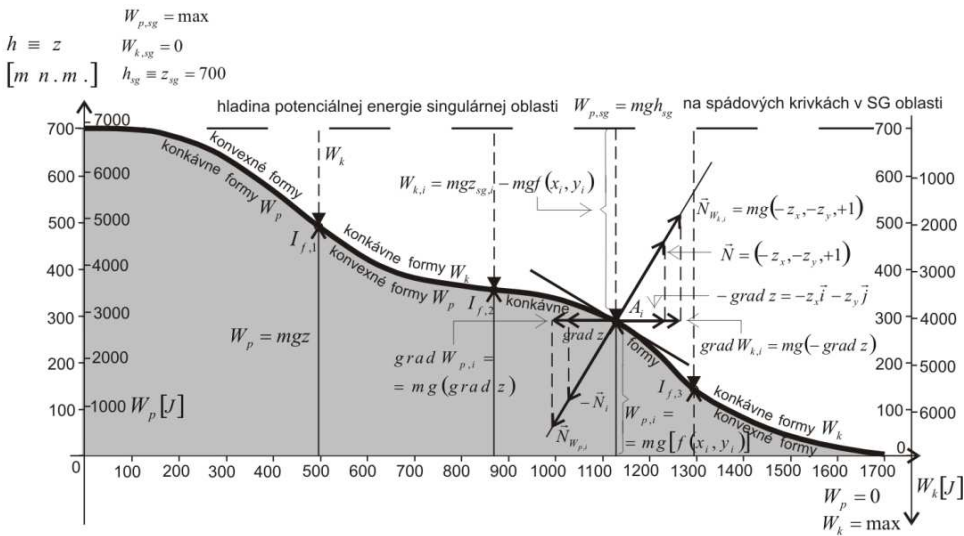
kde  $z_i < z_{sg,i}$  je výška bodu na spádovej krivke. Podľa zákona o zachovaní energie však pre každý bod  $*A_i(x_i, y_i, z_i)$  výškového poľa na TPG platí, že

$$\frac{1}{2} m (gt_i)^2 + mgz_i = (mhz)_{sg,i}, \quad (3h)$$

čo je podrobne ukázané na obr. 1 a vo vzájomnej súvislosti na obr. 2. Výškové pole je tak v každej svojej SG oblasti zároveň spojené s poľom jeho kinetickej a potenciálnej energie vyjadrenej vzhľadom na jej SG bod. Možno to tiež v zmysle hornej časti (obr. 1) vyjadriť tak, že pole kinetickej energie je „zrkadlovým obrazom“ výškového poľa pre každú SG oblasť na TPG a v jej skalárnej báze  $(x, y)$ . Každému bodu  $*A_i(x_i, y_i, z_i) \in *E_{RF}$  na TPG je teda priradený jeho obraz  $*A_i(x_i, y_i, W_{k,i})$  na interpolačnej ploche kinetickej energie a jej skalárnej bázy



Tento fyzikálny aspekt geometrie výškového poľa zasadeného do tiažového poľa Zeme tak súvisí so vzájomnou orientáciou vektorov normál  $\mathbf{N}_{W_p}$ ,  $\mathbf{N}_{W_k}$  potenciálnej a kinetickej energie na spádových krivkách výškového poľa a ich gradientov  $\text{grad } W_{p,i}$ ,  $\text{grad } W_{k,i}$  vo vzťahu k výškovému gradientu  $\text{grad } z$ , resp.  $-\text{grad } z$ . Tým má zásadný význam pre definíciu a interpretáciu geometrických foriem georeliéfu. Vzájomný súvis medzi výškovým poľom v smere spádovej krivky, poľom potenciálnej energie vo vzťahu k jej výškam a kinetickou energiou je zároveň aj vo vzťahu k orientácii vektorov normál  $\mathbf{N}_{W_p}$ ,  $\mathbf{N}_{W_k}$  potenciálnej a kinetickej energie vo vzťahu k orientácii  $\text{grad } z$  a  $-\text{grad } z$  výsledne vyjadrený na (obr. 2).



Obr. 2. Porovnanie a vzájomný vzťah geometrických foriem spádovej krivky TPG vzhľadom na potenciálnu a kinetickú energiu  $W_p$  a  $W_k$

Geometrické formy sú určené orientáciami vektorov normál  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_{W_p}$  a  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{N}_{W_k}$  vo vzťahu k orientáciám  $\text{grad } W_p$ ;  $\text{grad } z$  a  $\text{grad } W_k$ ;  $-\text{grad } z$  vzhľadom na priebeh potenciálnej a kinetickej energie  $W_p$  a  $W_k$  na spádovej krivke.

V tejto súvislosti je potrebné vyjadriť aj širší význam parciálnych derivácií  $z_x$ ,  $z_y$ ,  $z_{xx}$ ,  $z_{xy}$ ,  $z_{yy}$  funkcie (1). Vyjadrené v zmysle (2c) sú ich hodnoty v skalárnej báze  $(x, y)$  tak isto funkciou polohy  $x, y$ , takže v nej tvoria skalárne polia vyjadrené všeobecnými vzťahmi

$$z_x = z_x(x, y); z_y = z_y(x, y); z_{xx} = z_{xx}(x, y); z_{xy} = z_{xy}(x, y); z_{yy} = z_{yy}(x, y). \quad (4)$$

Ich skalárne hodnoty vstupujú zároveň ako vstupné premenné do matematických vzťahov jednotlivých morfometrických veličín z množiny  $\mathbf{G}_{RF}$ , ktoré boli podrobne odvodené v prácach Krcha (1973, 1990 a 2001).

Jednotlivými funkciami zo (4) je tak ku každému bodu  $A_i(x_i, y_i)$   $z_i \in E_{RF}$  v skalárnej báze  $(x, y)$  namiesto pôvodnej hodnoty skalára výšky  $z_i$  priradená vždy jedna hodnota  $z_x, z_y, \dots, z_{yy}$ . Skalárne polia (4) sú tak v skalárnej báze  $(x, y)$  tvorené množinami bodov

$$\begin{aligned} {}^{(zx)}E_{RF} &= \{[A_i(x_i, y_i)(z_x)_i]\}_{i \in I}, & {}^{(zy)}E_{RF} &= \{[A_i(x_i, y_i)(z_y)_i]\}_{i \in I}, \dots, \\ {}^{(zyy)}E_{RF} &= \{[A_i(x_i, y_i)(z_{yy})_i]\}_{i \in I}, \end{aligned} \quad (5)$$

kde  $I$  je indexová množina a  $i = 1, 2, \dots$  je vhodne volený identifikačný znak pre usporiadanú dvojicu  $x_i, y_i$  a k nej priradený skalár  $(z_x)_i, (z_y)_i, \dots, (z_{yy})_i$  určený príslušnou funkciou (4).

Skalárnemu poľu výšok  $z$  (1) s jeho izočiarovým poľom (3a), (3b) sú tak v skalárnej báze  $(x, y)$  priradené aj skalárne polia parciálnych derivácií (4) s ich izočiarovými poliami.

#### 4. ORIENTÁCIA GRADIENTA A JEHO VZŤAH K ORIENTÁCII VEKTORA NORMÁLY $\mathbf{N}_i$ BEZ TIAŽOVÉHO POĽA A V TIAŽOVOM POLI ZEME

Aby bolo možné geometrickú štruktúru TPG korektne vyjadriť vzhľadom na tiažové pole Zeme a smer jeho pôsobenia na georeliéf, bolo v zmysle prác Šalamona (1961, 1963a a 1963b) a Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1990 a 2001) potrebné určiť:

a) základné geometrické vlastnosti hladkej TPG v infinitezimálnom okolí každého jej ľubovoľného bodu  ${}^*A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$ ,

b) vyjadriť na TPG a v jej skalárnej báze  $(x, y)$  orientáciu vektora normály  $\mathbf{N} = (z_x, z_y, -1)$  v zhode s orientáciou vektora grad  $z = z_x \mathbf{i} + z_y \mathbf{j}$  bez tiažového poľa Zeme, ako aj orientáciu vektora normály  $\mathbf{N} = (-z_x, -z_y, +1)$  v zhode s orientáciou vektora  $-\text{grad } z = -z_x \mathbf{i} - z_y \mathbf{j}$  v tiažovom poli Zeme v zmysle podmienky c) uvedenej v tretej časti článku.

Pre exaktné určenie geometrických vlastností TPG v infinitezimálnom okolí jej ľubovoľného bodu  ${}^*A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  postačujú v zmysle prác Šalamona (1961, 1963a a 1963b) a na ne nadväzujúcich prác Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1990 a 1992/1993) prvé dva členy Taylorovho rozvoja funkcie (1), zatiaľ čo ostatné členy možno zanedbať. V uvedenom zmysle je teda východiskom prvý a druhý diferenciál

$$dz = z_x dx + z_y dy, \quad d^2z = z_{xx} dx^2 + 2 z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2 \quad (6)$$

funkcie (1), ako aj jej derivácia prvého a druhého rádu v ľubovoľnom smere  $\alpha_s$  ( $0^\circ$ ;  $360^\circ$ )

$$\frac{dz}{ds} = z_x \cos \alpha_s + z_y \sin \alpha_s; \quad \frac{d^2z}{ds^2} = z_{xx} \cos^2 \alpha_s + 2 z_{xy} \cos \alpha_s \sin \alpha_s + z_{yy} \sin^2 \alpha_s, \quad (7)$$

kde  $\cos \alpha_s = (dx/ds)$  a  $\sin \alpha_s = (dy/ds)$ .

Aby sme teda z fyzikálneho hľadiska ukázali dôležitosť orientácie gradientov  $z$  a s nimi súvisiacej orientácie vektorov normál  $\mathbf{N}$ , vyjadrieme najprv gradientové pole čisto z matematického hľadiska bez zohľadnenia tiažového poľa Zeme a následne po ňom so zohľadnením tiažového poľa Zeme. Ukážeme, že obe rozdielne orientácie zároveň súvisia aj so vzájomným bilančným vzťahom potenciálnej a kinetickej energie (3f), (3g) v tomto poli.

Gradientové pole výšok funkcie (1) bez zohľadnenia tiažového poľa Zeme; vzťah orientácie vektora grad  $z$  v skalárnej báze  $(x, y)$  k orientácii vektora normály  $\mathbf{N}$  na TPG

Deriváciu  $dz/ds$  (7) vyjadrenú v smere spádovej krivky  $\alpha_n$  (teda pre  $\alpha_s = \alpha_n$ ) označme ako  $dz/dn$ . Derivácia  $dz/dn$  vyjadrená v smere spádových kriviek ako skalárny súčin dvoch vektorov (bez zohľadnenia tiažového poľa Zeme) má tvar

$$dz/dn = \text{grad } z \cdot \mathbf{n}^0, \quad (8a)$$

kde

$$\text{grad } z = z_x \mathbf{i} + z_y \mathbf{j} \quad (8b)$$

je výškový gradient, ktorý v každom bode  $A_i[(x_i, y_i) \mid z_i] \in E_{RF}$  skalárnej bázy  $(x, y)$  leží v dotyčnici  $n$  k spádovej krivke a je orientovaný vždy na stranu stúpajúceho skalára  $z$ . Je teda na TPG orientovaný vždy proti svahu, z nižšej geopotenciálnej hladiny na vyššiu (obr. 3 a). V skalárnej báze  $(x, y)$  tvorí grad  $z$  gradientové pole orientované na stranu stúpajúceho skalára výšky  $z$  (obr. 3b). Jednotkový vektor

$$\mathbf{n}^0 = \mathbf{i} \cos \alpha_n + \mathbf{j} \sin \alpha_n \quad (9a)$$

je orientovaný v zhode s gradientom grad  $z$ , takže jeho súradnice

$$\cos \alpha_n = \frac{dx}{dn} = \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}; \quad \sin \alpha_n = \frac{dy}{dn} = \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}, \quad (9b)$$

sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi. Gradienty (8b) takto orientovaného gradientového poľa (8b) v každej SG oblasti do svojho SG-bodu vbiehajú (obr. 1 a 3b).

Rovnica dotyčnice  $n$  k spádovej krivke, prechádzajúcej v skalárnej báze  $(x, y)$  bodom  $A_i(x_i, y_i) \mid z_i \in E_{RF}$  (2b) (t. zn. rovnica normály  $n$  k dotyčnici k vrstevnici), je potom určená týmto bodom  $A_i(x_i, y_i) \mid z_i$  a smerovým jednotkovým vektorom  $\mathbf{n}^0$  (9a), takže má tvar

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_i \\ \frac{z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} & \frac{z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \end{array} \right| = 0. \quad (10)$$

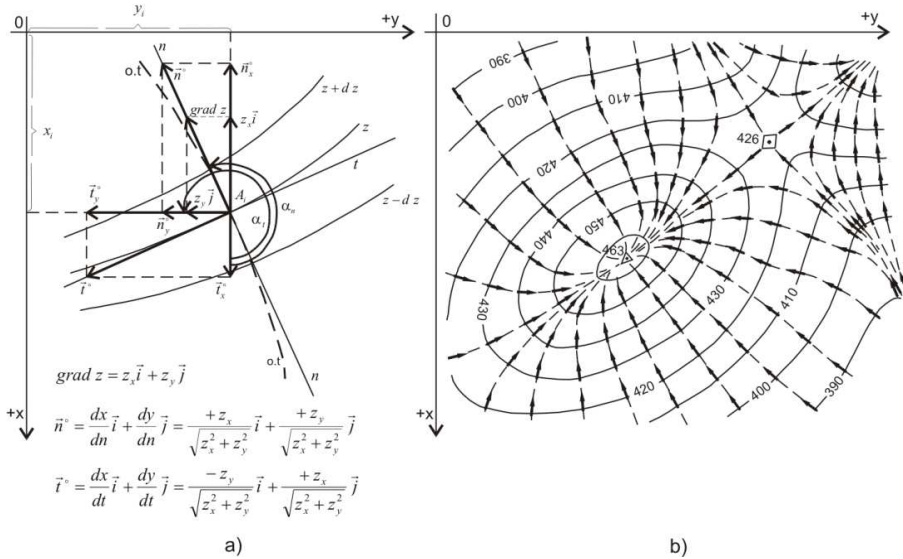
Tak isto rovnica dotyčnice  $t$  k vrstevnici prechádzajúcej v skalárnej báze  $(x, y)$  tým istým bodom  $A_i(x_i, y_i) \mid z_i \in E_{RF}$  (2b) je určená týmto bodom  $A_i(x_i, y_i) \mid z_i$  a smerovým jednotkovým vektorom

$$\mathbf{t}^0 = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = \frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \mathbf{i} + \frac{+z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \mathbf{j} \quad (11a)$$

a má tvar

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_i \\ -z_y & +z_x \end{array} \right| \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} = 0. \quad (11b)$$

Týmto jednotkovým vektorom  $\mathbf{t}^0$  (11a) je teda určený aj jej smer  $\alpha_t = \alpha_n + 90^\circ$  (obr. 3, časť a).



Obr. 3. Orientácia grad  $z$  a jeho poľa v skalárnej báze  $(x, y)$  z matematického hľadiska

Časť a): Orientácia vektora grad  $z$  na stranu stúpajúceho skalára  $z$ . Časť b): priebeh jeho gradientového poľa v singularnej (SG) oblasti výškového poľa podľa matematických kritérií diferenciálnej geometrie bez uvažovania tiažového poľa Zeme; v tomto prípade spádové krivky v smere grad  $z$  gradientového poľa do singularných (vrcholových) bodov vbiehajú.

S orientáciou vektora grad  $z$  na stranu stúpajúceho skalára  $z$  v každom bode  $A_i [(x_i, y_i, z_i) \in \mathbf{E}_{RF}]$  skalárnej bázy  $(x, y)$  súvisí aj orientácia vektora normály  $\mathbf{N}_i$  v jemu odpovedajúcom bode  $^*A_i (x_i, y_i, z_i) \in ^*\mathbf{E}_{RF}$  na TPG. Vektoru grad  $z$  (8b) odpovedá na TPG vektor normály

$$\mathbf{N}_i = (z_x, z_y, -1), \quad (11c)$$

orientovaný na „vnútornú“ stranu TPG (obr. 4, časť a), tak ako je to všeobecne uvedené v prácach z diferenciálnej geometrie. Dotyková rovina k TPG vzhľadom na (11c) v jej ľubovoľne zvolenom bode  $^*A_i (x_i, y_i, z_i) \in ^*\mathbf{E}_{RF}$ , bude tak určená rovnicou vo všeobecnom tvare

$$(z_{x,i})(X-x_i) + (z_{y,i})(Y-y_i) - (Z-z_i) = 0. \quad (12)$$

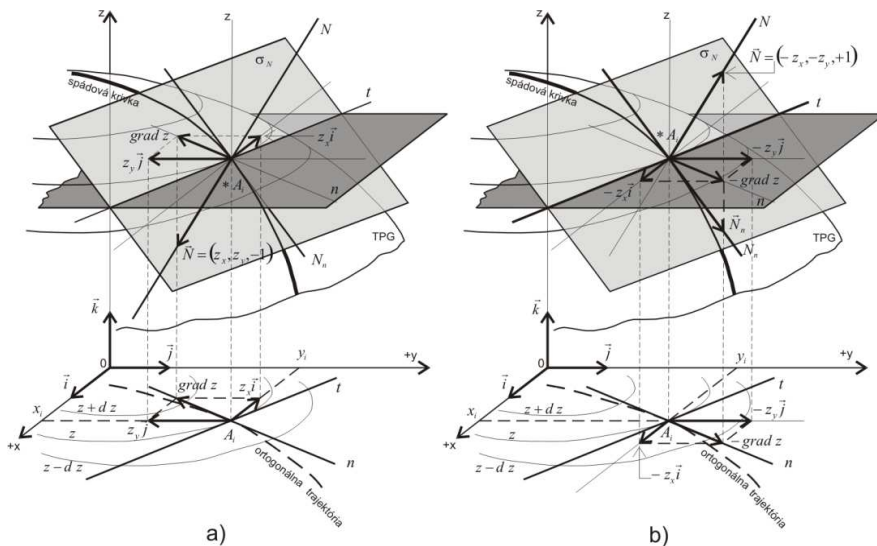
Orientácia vektora grad  $z$  (8b) na stranu stúpajúceho skalára  $z$  má však aj fyzikálny aspekt, a to v súvislosti s potenciálnou energiou  $W_p = mgz = mgl[f(x, y)]$ . V zmysle predtým uvedeného potenciálna energia  $W_p = mgz = mgl[f(x, y)]$  na spádovej krivke stúpa proti svahu so vzrastajúcou výškou  $z$ . Opačne, kinetická

energia  $W_{k,i}$  (3e) so vzrastajúcou výškou klesá (obr. 2). Zmena potenciálnej energie  $W_p$  na stranu  $z + dz$  o veľkosť  $dW_p$  v smere spádovej krivky na vzdialenosť  $dn$  vyjadrená v tvare skalárneho súčinu dvoch vektorov má tvar

$$dW_p/dn = (mgz_x \mathbf{i} + mgz_y \mathbf{j})[(dx/dn)\mathbf{i} + (dy/dn)\mathbf{j}] = mg(\text{grad } z) \mathbf{n}^0, \quad (12a)$$

čo je v zhode s (8a), (8b). *Potenciálna energia*  $W_p$  tak vyjadruje prácu vykonanú *proti tiažovej sile*, potrebnú na výzdvih hmotného bodu z nižšej hladiny na vyššiu, zatiaľ čo kinetická energia obsiahnutá v eróznodenudačných a transportných procesoch, pôsobiach na spádových krivkách v smere tiaže, pôsobí v opačnom smere, z vyššej hladiny na nižšiu. *Potenciálna energia*  $W_p$  z hľadiska predchádzajúceho aj súčasného objemu a hmotnosti jednotlivých SG oblastí, ako aj horského masívu ako celku, teda v podstate vyjadruje prácu vykonanú *proti tiažovej sile*, potrebnú na ich výzdvih z nižšej hladiny na vyššiu. Orientácia vektora grad  $z$  z tohto hľadiska tak viac súvisí s výzdvihom horského masívu, ako s geometriou jeho povrchu, skúmanou „z vnútra“ masívu.

*Poznámka 2.* V zmysle vzťahu (1) uvažujeme o georeliéfe ako o hladkej statickej TPG. Preto staticky uvažovaný objem  $V$  vyčleneného horského masívu, vyjadrený plochou hypsografickej krivky, násobený priemernou špecifickou hmotnosťou  $\rho$ , dáva jeho súčasnú celkovú priemernú hmotnosť  $m = \rho V$ . Jednotlivé vyčlenené SG oblasti tohto masívu potom na hypsografickej krivke udávajú jeho jednotlivé parciálne objemy  $V_{sg}$  a vzhľadom na  $\rho$  aj ich parciálne hmotnosti  $m_{sg} = \rho V_{sg}$ . Pritom ich celková suma dáva súčasný celkový objem  $V$  a celkovú hmotu  $m$  tohto masívu. Poloha extrémov derivačnej krivky na hypsografickej krivke udáva pritom typické hodnoty výšky  $z_{tp}$  výzdvihu potrebné na vyjadrenie jeho celkovej potenciálnej energie  $W_p = \Sigma(\rho V_{sg}g)z_{tp}$ . *Koniec poznámky 2.*



Obr. 4. Orientácia vektora normály  $\mathbf{N}$  na TPG vo vzťahu k orientácii grad  $z$  v jej skalárnom poli výšok

- a) podľa čisto matematických kritérií diferenciálnej geometrie,  
b) so zohľadnením tiažového poľa Zeme

Gradientové pole funkcie (1) so zohľadnením tiažového poľa Zeme; vzťah orientácie vektora  $-\text{grad } z$  v skalárnej báze  $(x, y)$  k orientácii vektora normály  $\mathbf{N}$  na TPG

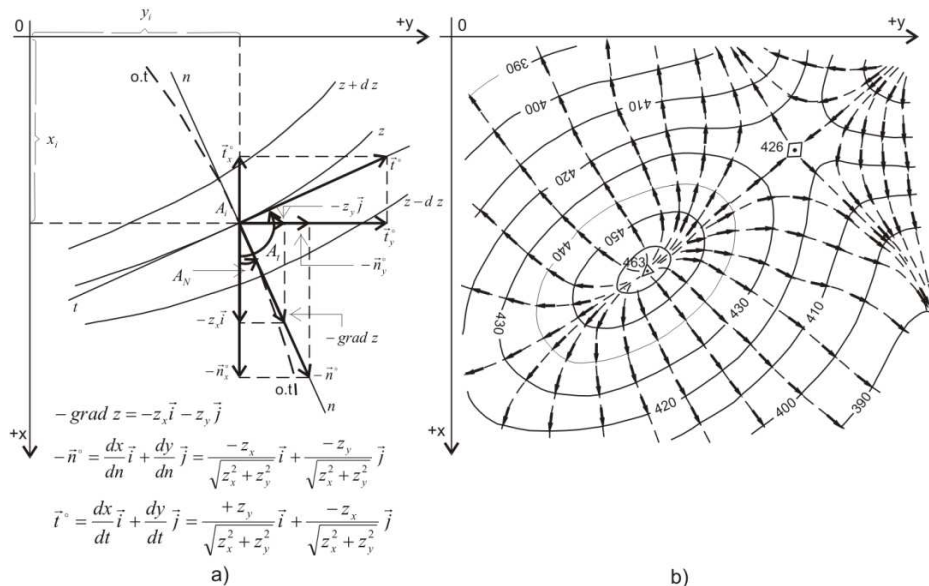
Pri zohľadnení pôsobenia tiažového poľa Zeme na TPG, v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$ , má derivácia  $dz/dn$ , vyjadrená ako skalárny súčin dvoch vektorov, tvar

$$dz/dn = -\text{grad } z \cdot \mathbf{n}^0. \quad (13a)$$

Výškový gradient

$$-\text{grad } z = -z_x \mathbf{i} - z_y \mathbf{j} \quad (13b)$$

je teda v tomto prípade na spádových krivkách orientovaný už na stranu klesajúceho skalára  $z$  z vyššej hladiny na nižšiu (obr. 4, časť b). Dôvod: *eróznodenučné a transportné procesy na georeliéfe v tiažovom poli Zeme energeticky v princípe vyjadrujú zmenu potenciálnej energie na kinetickú energiu* (3f) *Prebiehajú tak na vonkajšej strane TPG v smere spádových kriviek vždy na stranu klesajúceho skalára  $z$ , a teda vždy z vyššej geopotenciálnej hladiny na nižšiu, ako to vyplýva aj z obr. 5, časť a a časť b.*



Obr. 5. Časť a): orientácia vektora  $-\text{grad } z$  na stranu klesajúceho skalára  $z$ , v smere pôsobenia tiažového poľa Zeme.

Časť b): priebeh jeho gradientového poľa v singularnej (SG) oblasti výškového poľa podľa matematických kritérií diferenciálnej geometrie avšak s uvažovaním tiažového poľa Zeme; v tomto prípade spádové krivky v smere  $-\text{grad } z$  gradientového poľa zo singularných (vrcholových) bodov vybiehajú na stranu klesajúceho skalára  $z$ .

Vektor

$$-\mathbf{n}^0 = \mathbf{i} \cos A_N + \mathbf{j} \sin A_N, \quad (14a)$$

je jeho jednotkový vektor, v ktorom jeho súradnice

$$\cos A_N = \frac{dx}{dn} = \frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}}; \sin A_N = \frac{dy}{dn} = \frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \quad (14b)$$

sú zároveň aj jeho smerovými kosínusmi, pričom  $A_N = \alpha_n \pm 180^\circ$  (obr. 5, časť a). Preto gradienty (13b) takto orientovaného gradientového poľa v každej SG oblasti zo svojho SG-bodu v smere spádu vybiehajú z vyššej geopotenciálnej hladiny na nižšiu, teda oproti gradientom (8b) opačne (obr. 5, časť b). Kinetická energia  $W_{k,i}$  (3e) tak po svahu so zápornou zmenou výšky  $z$  stúpa a znižuje sa potenciálna energia  $W_p = (mgh)$ , pričom platí vzťah (3h).

Tá istá rovnica dotýčnice  $n$  k spádovej krivke prechádzajúcej v skalárnej báze  $(x, y)$  tým istým bodom  $A_i(x_i, y_i)$   $z_i \in E_{RF}$  (3b) je určená týmto bodom  $A_i(x_i, y_i)$   $z_i$ , avšak v tomto prípade smerovým jednotkovým vektorom  $-n^\circ$  (14a), takže má tvar

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_i \\ -z_x & -z_y \end{array} \right| \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} = 0. \quad (15)$$

Tak isto rovnica dotýčnice  $t$  k vrstevnici prechádzajúcej v skalárnej báze  $(x, y)$  tým istým bodom  $A_i(x_i, y_i)$   $z_i \in E_{RF}$  (2b) je určená jednak týmto bodom  $A_i(x_i, y_i)$   $z_i$  a jednak smerovým jednotkovým vektorom

$$-t^\circ = \frac{dx}{dt} i + \frac{dy}{dt} j = \frac{+z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} i + \frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} j, \quad (16a)$$

príčom má v tomto prípade tvar

$$\left| \begin{array}{cc} x - x_i & y - y_i \\ +z_y & -z_x \end{array} \right| \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} = 0. \quad (16b)$$

Jednotkovým vektorom (16a) je teda určený aj jej smer  $A_t = A_N + 90^\circ$  (obr. 5, časť a).

Pre grad  $z$  (8b) ako aj pre  $-\text{grad } z$  (13b) pritom platí, že

$$|\text{grad } z| = |-\text{grad } z| = \sqrt{z_x^2 + z_y^2} = \text{tg } \gamma_N \Rightarrow \gamma_N = \arctg \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \equiv \text{tg}^{-1} \sqrt{z_x^2 + z_y^2} \quad (17a)$$

Pre  $A_N$  vyjadrené zo vzťahu (14b) platí

$$A_N = \cos^{-1} \frac{-z_x}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \equiv \sin^{-1} \frac{-z_y}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2}} \Rightarrow A_N = \text{tg}^{-1} \left( \frac{z_y}{z_x} \right). \quad (17b)$$

Vyjadriť teraz z poľa kinetickej energie (3g) pre každú SG oblasť na TPG jednak zmenu kinetickej energie (3g) o hodnotu  $dW_k/dn$  v smere spádovej krivky na vzdialenosť  $dn$  a jednak orientáciu gradientov grad  $W_k$  jej gradientového poľa k orientácii gradientov grad z gradientového poľa výšok. Derivácia funkcie (3g) má po úprave tvar skalárneho súčinu dvoch vektorov

$$(dW_{k,i}/dn) = (-mg z_x \mathbf{i} - mg z_y \mathbf{j})[(dx/dn)\mathbf{i} + (dy/dn)\mathbf{j}]. \quad (17c)$$

Z nej vyplýva, že gradient poľa kinetickej energie grad  $W_{k,i}$  má vo vzťahu k výškovému poľu a jeho gradientovému poľu tvar

$$\text{grad } W_{k,i} = (\partial W_{k,i}/\partial x) \mathbf{i} + (\partial W_{k,i}/\partial y) \mathbf{j} = -mg z_x \mathbf{i} - mg z_y \mathbf{j} \Rightarrow \text{grad } W_{k,i} = mg (-\text{grad } z). \quad (17d)$$

Vektor  $-\text{grad } z$  v (17d) je teda v zhode s vektorom (13b) orientovaný na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$ , ako to tiež názorne vyplýva z obr. 1 a 2. Vektor  $(dx/dn)\mathbf{i} + (dy/dn)\mathbf{j} = \mathbf{n}^0$  je pritom jednotkový vektor totožný so (14a).

S orientáciou vektora  $-\text{grad } z$  na stranu klesajúceho skalára  $z$  v každom bode  $A_i[(x_i, y_i, z_i)] \in E_{RF}$  skalárnej bázy  $(x, y)$  tak isto súvisí aj orientácia vektora normály  $\mathbf{N}_i$  v jemu odpovedajúcom bode  $A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  na TPG. Vektoru  $-\text{grad } z$  (13b) orientovanému v skalárnej báze  $(x, y)$  na stranu klesajúceho skalára  $z$ , odpovedá na TPG vektor normály  $\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$  orientovaný na „vonkajšiu“ stranu TPG (obr. 4b). Tá istá dotyková rovina k TPG (12) v jej ľubovoľne zvolenom bode  $A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$ , bude tak vzhľadom na  $\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$  určená rovnicou vo všeobecnom tvare

$$(-z_x, i)(X - x_i) + (-z_y, i)(Y - y_i) + (Z - z_i) = 0. \quad (18a)$$

Vzhľadom na to, že vektor normály  $\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$  je opačne orientovaný ako vektor

$\mathbf{N}_i = (+z_x, +z_y, -1)$ , označme ho oproti vektoru  $\mathbf{N}_i = (+z_x, +z_y, -1)$  pre tento prípad ako jeho opačne orientovaný vektor

$$-\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1). \quad (18b)$$

V každom bode  $A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  na TPG teda existuje dotyková rovina (18a) určená vektorom normály  $-\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$  (18b), pričom týmto dotykovým bodom prechádza na TPG vždy iba jedna vrstevnica a jedna spádová krivka (obr. 4b). Dotyčnica  $(N_n)_i$  k spádovej krivke na TPG zameraná vektorom  $(\mathbf{N}_n)_i = [-z_x; -z_y; -(z_x^2 + z_y^2)]$  leží v dotykovvej rovine (18a) a je v tomto bode kolmá na dotyčnicu  $t_i$  k vrstevnici rovnako ležiacu v dotykovvej rovine (18a). Táto je na TPG zameraná jednotkovým vektorom  $-\mathbf{t}^0$ , paralelným s jednotkovým vektorom  $-\mathbf{t}^0$  (16a) v skalárnej báze  $(x, y)$ , ktorý je smerovo orientovaný vzhľadom na orientáciu vektora normály  $-\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$ , a teda na orientáciu vektora  $-\text{grad } z$ . Obe sú navzájom na seba kolmé a presekávajú sa v dotykovom bode bode  $A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  (obr. 4b).

Dotyčniciam  $(N_n)_i$  k spádovým krivkám na TPG, ležiacim v dotykovvej rovine (18a) k TPG, odpovedajú v jemu odpovedajúcom bode  $A_i[(x_i, y_i); z_i] \in E_{RF}$  v skalárnej báze  $(x, y)$  dotyčnice  $n$  k spádovým krivkám určené jednotkovým vektorom  $-\mathbf{n}^0$  orientovaným na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Tak isto dotyčniciam  $t_i$  k vrstevniciam na TPG v tom istom ľubovoľnom dotykovom bode  $A_i(x_i, y_i, z_i) \in {}^*E_{RF}$  zodpovedajú v jemu zodpovedajúcom bode  $A_i[(x_i, y_i); z_i] \in E_{RF}$  v skalárnej báze  $(x, y)$  dotyčnice  $t$  k vrstevnici zameranej jednotkovým vektom

rom  $-t^0$  (16a) smerovo orientovaným vzhľadom na smer vektora  $-\text{grad } z$  (obr. 4, časť b).

Z fyzikálneho hľadiska je tak vektoru normály  $\mathbf{N}_{W,i} = [\partial W_{k,i} / \partial x_i; \partial W_{k,i} / \partial y_i; -1]$  na interpolačnej ploche kinetickej energie v bode  $A_i(x_i, y_i, W_{k,i})$  a v jemu zodpovedajúcom bode  $A_i(x_i, y_i, z_i)$  na TPG priradený jeho „zrkadlový“ obraz  $-\mathbf{N}_i = (-z_x, -z_y, +1)$ . Orientácii vektora  $\text{grad } W_{k,i}$  zodpovedá tak v skalárnej báze  $-\text{grad } z = (-z_x, -z_y)$ . To je stručne na profile spádovej krivky TPG vyjadrené na obr. 2. Z fyzikálnej stránky je teda v exaktnej geomorfometrii potrebné na TPG a v jej skalárnom poli uvažovať o orientácii dvojice vektorov  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N})$  so všetkými dôsledkami pri definícii geometrických foriem georeliéfu.

*Poznámka 3.* Opačné orientácie vektorov normál  $\mathbf{N}$  na TPG v súvislosti s orientáciami vektorov normál  $\mathbf{N}_{wp}$ ,  $\mathbf{N}_{wk}$  potenciálnej a kinetickej energie nie sú v rozpore so základnými matematickými kritériami. Oba normálové vektory, t. j. normálový vektor potenciálnej energie  $\mathbf{N}_{wp}$  (dolná časť obr. 1 a 2) a normálový vektor kinetickej energie  $\mathbf{N}_{wk}$  (horná časť obr. 1 a 2) sú totiž v úplnej zhode s matematickými kritériami diferenciálnej geometrie vždy orientované do vnútra spádovej krivky potenciálnej energie, ako aj do vnútra spádovej krivky kinetickej energie. Podstatný rozdiel medzi nimi spočíva v tom, že na spádovej krivke TPG je jeden z nich, vektor normály potenciálnej energie  $\mathbf{N}_{wp}$ , orientovaný na jej „vnútornú“ stranu, zatiaľ čo na tej istej spádovej krivke TPG je druhý z nich, vektor normály kinetickej energie  $\mathbf{N}_{wk}$  orientovaný na jej vonkajšiu stranu (obr. 2). Pritom oba z nich v príslušnom ľubovoľnom bode TPG ležia vždy na tej istej normále  $\mathbf{N}$  na TPG. *Koniec poznámky 3.*

Dôsledky rozdielnej orientácie dvojice vektorov  $(\text{grad } z, \mathbf{N})$  a  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N})$  na vyjadrenie a interpretáciu geometrických foriem georeliéfu

*Rozdielna orientácia dvojice vektorov  $(\text{grad } z, \mathbf{N}) = [(\text{grad } z = (z_x, z_y); \mathbf{N} = (z_x, z_y, -1)]$  vyjadrená na obr. 4, časť a, oproti orientácii dvojice  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N}) = [-\text{grad } z = (-z_x, -z_y); \mathbf{N} = (-z_x, -z_y, +1)]$  vyjadrenej na obr. 4, časť b, má z fyzikálneho hľadiska v zmysle vzťahov (3e) a (3f) zásadný vplyv na definíciu a interpretáciu geometrických foriem TPG.*

Geometrické formy georeliéfu vyjadrené v dvojici  $(\text{grad } z, \mathbf{N})$  vzťahmi (11c), (8b) vzhľadom na „vnútornú“ stranu TPG (obr. 4, časť a), majú iné znamienka a inú interpretáciu, ako geometrické formy vyjadrené v dvojici  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N})$  vzťahmi (13b) a (18b) vzhľadom na „vonkajšiu“ stranu TPG (obr. 4, časť b). V tiažovom poli Zeme prebiehajú eróznodenudačné, transportné a akumulčné procesy zmenou potenciálnej energie na kinetickú energiu na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$  na „vonkajšej“ strane TPG, z čoho potom vyplýva druhá interpretácia geometrických foriem georeliéfu. Dôsledky rozdielnej orientácie dvojíc vektorov  $(\text{grad } z, \mathbf{N})$  a  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N})$  pri klasifikácii geometrických foriem georeliéfu a ich nerešpektovanie ukážeme v nasledujúcich častiach.

Zohľadnenie fyzikálneho aspektu problému umožňuje teda fyzikálne správne vyjadrenie geometrických foriem TPG z hľadiska smeru priebehu modelačných procesov, ktoré pôsobia v tiažovom poli Zeme na „vrchnej“ strane TPG na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$ . Jeho opomenutie pri definícii a interpretácii morfometrických veličín a s nimi súvisiaceho významu geometrických foriem,

vedie potom k významovo paradoxným záverom. A to napriek tomu, že obe definície sú korektné.

Preto v tejto súvislosti pre porovnanie najprv stručne načrtujeme množinu morfometrických veličín vyjadrujúcich geometrickú štruktúru TPG a jej skalárneho poľa výšok tak, ako bola formulovaná v prácach Krcha (1973, 1986 a 1990) so zohľadnením fyzikálneho hľadiska. To umožní zovšeobecniť geometrické vlastnosti modelovanej TPG.

### MNOŽINA MORFOMETRICKÝCH VELIČÍN $G_{RF}$ , ICH FYZIKÁLNY VÝZNAM PRE FORMULÁCIU GEOMETRICKÝCH FORIEM TPG

Hladká TPG a jej geometrická štruktúra, pôvodne zasadená do tiažového poľa Zeme, bola z rôznych hľadísk podrobne analyzovaná, rozširovaná a vyjadrená pomocou množiny morfometrických veličín  $G_{RF}$  v rozsiahlom rade prác. Vzhľadom na zameranie a cieľ tejto práce uvádzame len niekoľko vybraných, priamo súvisiacich zdrojových prác Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1990, 1992/93 a 2001), Evansa (1972), Jenča (1992/93), Mitásovej a Hofierku (1993), Minára (1995/1996) a Krcha a Benovej (2004), ktoré sa ho bezprostredne dotýkajú. Na základe vybraných základných prvkov z množiny  $G_{RF}$  boli potom vzhľadom na tiažové pole Zeme exaktne definované geometrické formy georeliéfu, vyjadrené v tvare množiny  $F_C = [F_n, F_t, F_{Kr}, F] \subset G_{RF}$ , ktorá je stručne analyzovaná v nasledujúcej kapitole.

Množina základných morfometrických veličín georeliéfu  $G_{RF}$  a formulácia geometrických foriem TPG

Množina základných morfometrických veličín georeliéfu bola v uvedených citovaných prácach postupne vyjadrená v tvare

$$G_{RF} = (|\text{grad } z|, \gamma_N, A_N, (K_N)_n \omega, (K_N)_t, K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N, \dots). \quad (19)$$

Z hľadiska cieľa tejto práce sú teraz uvedené iba jej základné prvky. Tieto tvoria v skalárnej báze  $(x, y)$  skalárne polia. V zhode s prácami Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1990 a 2001) pre úplnosť znovu rozvedme ich nasledujúci pôvodný význam:

– $\text{grad } z$  – výškový *gradient* vyjadrený vzhľadom na tiažové pole Zeme vzťahom (13b), a teda je orientovaný na stranu klesajúceho skalára  $z$ ; v skalárnej báze  $(x, y)$  TPG je zdrojovým gradientovým poľom pre vyjadrenie morfometrickej veličiny  $A_N$  a  $|\text{grad } z|$ , kde

$|\text{grad } z| = \text{tg } \gamma_N$  – je *absolútna hodnota výškového gradienta* vyjadrená zo vzťahov (17a). Jej zmena pri hodnotách

$$\frac{\partial}{\partial n}(|\text{grad } z|) > 0$$

v smere klesajúceho skalára  $z$  fyzikálne vyjadruje zrýchlenie a pri hodnotách

$$\frac{\partial}{\partial n}(|\text{grad } z|) < 0$$

v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$  vyjadruje spomalenie tokov. V skalárnej báze  $(x, y)$  je zdrojovým poľom pre vyjadrenie ďalšej morfo-metrickej veličiny  $\gamma_N$ .

$\gamma_N$  – uhol sklonu TPG v smere spádových kriviek, je vyjadrený  $z$   $[-\text{grad } z]$  vo vzťahoch (17a). Svojou veľkosťou zároveň pri stanovenom výškovom intervale  $dz$  určuje na TPG a v jej skalárnej báze  $(x, y)$  najkratšiu vzdialenosť v smere spádovej krivky medzi dvomi priesečnicami dvoch geopotenciálnych hladín  $z$ ,  $z-dz$ . Fyzikálne teda vyjadruje aj najrýchlejšiu možnú zápornú zmenu potenciálnej energie  $W_p$  o hodnotu  $-dW_p$  na vzdialenosť  $dn$  v smere spádových kriviek medzi dvoma vrstevnicami  $z$ ,  $z-dz$  a zároveň najrýchlejší prírastok kinetickej energie  $W_k$  na hodnotu  $W_k+dW_k$ . Morfometrická veličina  $\gamma_N$  je zároveň vstupnou premennou pre zložku sily  $F_n$  indukujúcu pohyb častíc na TPG (pozri nasledujúcu poznámku 4).

$A_N$  – orientácia georeliéfu voči svetovým stranám je vyjadrená z orientácie vektora  $-\text{grad } z$  zo vzťahov (17b). Podľa veľkosti jej zmeny  $(dA_N/dt) > 0$  respektíve  $(dA_N/dt) < 0$  v smere dotýčnice  $t$  k vrstevnici zároveň vyjadruje smerovú divergenciu, alebo konvergenciu vektorov  $-\text{grad } z$ , a teda aj samotných spádových kriviek, čo fyzikálne znamená konvergenciu (sústredenie), resp. divergenciu (rozptyl) tokov v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Morfometrická veličina  $A_N$  je tak isto vstupnou premennou pre zložku sily  $F_n$  indukujúcu pohyb častíc na TPG (pozri nasledujúcu poznámku 4).

$(K_N)_n \equiv \omega$  – normálová krivosť georeliéfu definovaná v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$ , je vyjadrená vzťahom

$$(K_N)_n \equiv \omega = -\frac{z_{xx}z_x^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_y^2}{(z_x^2 + z_y^2)\sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (20)$$

pričom na TPG a v jej skalárnom poli nadobúda hodnoty  $0 \leq (K_N)_n \equiv \omega \leq 0$ . Podľa hodnôt  $(K_N)_n \omega > 0$ , alebo  $(K_N)_n \omega < 0$  kvantitatívne vyjadruje konvexitu a konkavitu normálových foriem georeliéfu v smere spádových kriviek vzhľadom na klesajúce hodnoty skalára  $z$ . Pritom pre  $(K_N)_n \equiv \omega > 0$  v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$  zároveň fyzikálne vyjadruje zrýchlenie a pre  $(K_N)_n \equiv \omega < 0$  spomalenie tokov na TPG.

$(K_N)_t$  – normálová krivosť definovaná v smere dotýčnic k vrstevniciam, vyjadrená vzťahom

$$(K_N)_t \equiv \omega = -\frac{z_{xx}z_y^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2}{(z_x^2 + z_y^2)\sqrt{(1 + z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (21)$$

kde dotýčnice  $t$  k vrstevniciam boli jednotkovým vektorom  $-\mathbf{t}^0$  smerovo orientované vzhľadom na smer vektora  $-\text{grad } z$ ; pritom  $(K_N)_t$  nadobúda na TPG a v jej skalárnom poli hodnoty  $0 \leq (K_N)_t \leq 0$ . Preto pre  $(dA_N/dt) > 0$  v smere dotýčnice k vrstevnici vyjadruje divergenciu spádových kriviek, a teda aj divergenciu tokov eróznodenudačných procesov, teda ich rozptyl a pre  $(dA_N/dt) < 0$  v smere dotýčnice k vrstevnici vyjadruje konvergenciu spádových kriviek a aj konvergenciu (sústredenie) tokov eróznodenudačných procesov.

$K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N$  (22) – *horizontálna krivosť TPG* vyjadrená je vzhľadom na priesečnicu ekvipotenciálnej hladiny tiažového poľa Zeme s TPG vzťahom

$$K_r = - \frac{z_{xx}z_y^2 - 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2}{\sqrt{(z_x^2 + z_y^2)^3}}, \quad (22)$$

kde

$$\sin \gamma_N = \sqrt{z_x^2 + z_y^2} / \sqrt{z_x^2 + z_y^2} + 1.$$

Na TPG a v jej skalárnom poli nadobúda hodnoty  $0 \leq K_r \leq 0$ , pričom fyzikálne na príslušnej vrstevnici  $C_z$  pre potenciálnu energiu  $W_p$  platí, že  $W_p = \text{const}$ . Podľa hodnôt  $K_r > 0$ , respektíve  $K_r < 0$  klasifikuje a kvantitatívne charakterizuje horizontálne formy georeliéfu. Pre  $K_r > 0$  zároveň kvantitatívne vyjadruje konvexitu horizontálnych foriem TPG a na konvexných horizontálnych formách na spádových krivkách v smere –grad z fyzikálne vyjadruje divergenciu, a teda rozptyľovanie tokov. Pre  $K_r < 0$  kvantitatívne vyjadruje konkavitu horizontálnych foriem a na spádových krivkách vyjadruje konvergenciu (sústredenie) tokov v smere –grad z na stranu klesajúceho skalára z.

V zmysle už uvedeného bola množina morfometrických veličín  $\mathbf{G}_{RF}$  v prácach Krcha (1964a, 1964b, 1973, 1986, 1990, 1992/1993 a 2001) definovaná *vzhľadom na tiažové pole Zeme* preto, aby jej prvky súčasne mali *tak matematický, ako aj fyzikálny význam*. Morfometrické veličiny  $(K_N)_n \omega$ ,  $(K_N)_t$ ,  $K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N \in \mathbf{G}_{RF}$  sú tak priamym podkladom pre vyjadrenie a klasifikáciu geometrických foriem georeliéfu, ktoré majú súčasne aj fyzikálny význam.

Vzťahy (20), (21), (22) boli pôvodne odvodené Krchom (1973, 1986 a 1990). Vzťah (20) pre normálovú krivosť  $(K_N)_n \equiv \omega$  bol odvodený v súradnicovej sústave  $\langle O; n, z \rangle$  v tvare funkcie  $z = f(n)$  rozvinutím profilu spádovej krivky TPG do zvislej roviny  $(n, z)$  vhodnej pre priamy výpočet jej normálovej krivosti  $(K_N)_n \equiv \omega$  s vylúčením jej torzie (Krch 1973). Toto odvodenie bolo pôvodné, čo sa však v novších prácach dost opomína.

Okrem postupu v práci Krcha (1973), boli rovnice (20), (21), (22) neskôr ešte odvodené aj na základe vzťahu pre Gaussovskú normálovú krivosť, všeobecne známu v diferenciálnej geometrii. Boli odvodené jednak so znamienkom (+) a jednak so znamienkom (–) s jeho podrobným zdôvodnením (Krch 1986, 1990, pp. 242-245) – podkapitola 4.3, vzťahy (4.3.1) až (4.3.10).

Oproti týmto pôvodným vzťahom (20), (21), (22), odvodeným v prácach Krcha (1973, 1986 a 1990), boli tieto vzťahy neskôr ešte raz dodatočne odvodené aj v práci Mitásovej a Hofierku (1993, p. 661), rovnice (9), (11), a to z čisto matematického hľadiska, citujúc prácu Rektorysa (1969), a teda so znamienkom (+). V absolútnych hodnotách sú uvedené rovnice (9), (11), (p. 661) z citovanej práce významovo identické s predtým odvodenými vzťahmi z pôvodnej práce Krcha (1973), ako aj so vzťahmi (4.3.1) až (4.3.10) jeho ďalšej práce (Krch 1990).

V zhode s matematickými kritériami diferenciálnej geometrie je v práci Mitásovej a Hofierku (1993, p. 661) vektor normály  $\mathbf{N} = (z_x, z_y, -1)$  k TPG orientovaný na jej „vnútornú“ stranu, v rovniciach (9), (11), uvedenej práce sú

namiesto znamienok (–) opačné znamienka (+). V matematických vzťahoch (9), (11), bola však v zhode s citovanou prácou Rektorysa (1969) použitá iná symbolika.

Podľa čisto matematických kritérií by potom z toho oproti prácam Krcha (1973, 1986 a 1990) mali v práci Mitášovej a Hofierku (1993) vyplývať aj dôsledky pre opačnú klasifikáciu geometrických foriem TPG. Výsledná klasifikácia (vyjadrená na obr. 2 a v texte pod obrázkom, p. 662 citovanej práce) je však napriek tomu uvedená v zhode s prácami Krcha (1973, 1986 a 1990), teda z fyzikálneho hľadiska celkovo dodatočne správne (text pod obr. 2, p. 662 citovanej práce).

V citovanej práci Mitášovej a Hofierku (1993), jednej z fundamentálnych a medzinárodne často citovaných prác, sa tak v tejto diskutovanej oblasti prejavila čiastočná nejednoznačnosť medzi dôsledne korektným odvodením vzťahov podľa matematických kritérií diferenciálnej geometrie na jednej strane a výsledným vyjadrením geometrických foriem podľa dodatočne zohľadnených fyzikálnych kritérií na druhej strane. Pritom práve jej autori podstatne v tomto smere obohatili technológiu GRASS, v ktorej sú geometrické formy georeliéfu z hľadiska tiažového poľa Zeme oproti SURFER-u charakterizované geofyzikálne správne. Uvedená nejednoznačnosť mala však potom svoje dôsledky.

Na citovanú prácu Mitášovej a Hofierku (1993) totiž nadviazali práce Jenča et al. (2009) a Jenča (2010) vychádzajúce dôsledne z korektných matematických kritérií tejto práce. Geometrické formy teda z tohto hľadiska výsledne a presne oklasifikovali konzekventne správne podľa matematických kritérií uvedenej práce, čiže z geomorfologického hľadiska presne *opačne*. Výsledkom presného postupu (Jenčo et al. 2009) a jeho dôsledného zohľadnenia týchto kritérií zo spomínanej práce (Mitášová a Hofierka 1993) bola preto táto matematicky korektne vyjadrená klasifikácia paradoxne z geomorfologického hľadiska presne opačná.

#### GEOMETRICKÉ FORMY GEORELIEFU V TIAŽOVOM POLI A BEZ TIAŽOVÉHO POĽA ZEME

Základom pre definíciu a klasifikáciu geometrických foriem georeliéfu vo fyzikálne poňatej geomorfometrii bola trojica morfometrických veličín

$$\left[ (K_N)_n \equiv \omega; (K_N)_t; K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N \right] \in G_{RF}, \quad (23)$$

ktorá bola vzhľadom na tiažové pole Zeme odvodená v prácach Krcha (1973 a 1990) a v tejto práci je vyjadrená vzťahmi (20), (21) a (22). Vzhľadom na orientáciu dvojice vektorov (–grad  $z$ ; – $\mathbf{N}$ ) bola potom definovaná už spomenutá množina základných geometrických foriem  $F_C = [F_n, F_t, F_{Kr}, F] \subset G_{RF}$ , aj s príslušnými znamienkami. Dvojica  $(F_n, F_t) \subset F_C$  vyjadruje dve rozdielne normálové formy,  $F_{Kr} \subset F_C$  vyjadruje horizontálne formy a  $F \subset F_C$  vyjadruje celkové formy georeliéfu (Krcho 1973, 1986, 1990 a 2001).

Takto definované geometrické formy georeliéfu  $F_C = [F_n, F_t, F_{Kr}, F] \subset G_{RF}$ , vyjadrené vzhľadom na tiažové pole Zeme, majú podstatný priestorovo diferencovaný vplyv na režim a priebeh procesov na georeliéfe. Jeho podstata spočíva v priestorovej diferenciácii rozloženia intenzity zložiek  $F_N, F_n$  tiažovej

sily  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  v závislosti od  $\mathbf{F}_C \subset \mathbf{G}_{RF}$ , v ktorých ako dôležité premenné vystupujú morfometrické veličiny  $\gamma_N$ , a  $A_N$ . Jej zložky  $\mathbf{F}_N, \mathbf{F}_n$  podľa hodnôt morfometrických veličín  $(\gamma_N, A_N) \in \mathbf{G}_{RF}$  pôsobia v každom bode  $*A_i[x_i, y_i, z_i] \in *E_{RF}$  georeliéfu na hmotné častice vždy smerom z vyššej geopotenciálnej hladiny na nižšiu po čo najkratšej možnej dráhe na georeliéfe. Geometrické formy  $\mathbf{F}_C = [\mathbf{F}_n, \mathbf{F}_t, \mathbf{F}_{Kr}, \mathbf{F}]$  majú teda popri geometrickom význame súčasne aj fyzikálny význam.

**Poznámka 4.** Zložka  $\mathbf{F}_N = m\mathbf{g} \cos \gamma_N$  sily  $\mathbf{F} = m\mathbf{g}$  leží na spádovej krivke v normále  $N_i$  k TPG prechádzajúcej bodom  $*A_i(x_i, y_i, z_i) \in *E_{RF}$ , pričom tlačí hmotnú časticu  $m$  na TPG. Zložka  $\mathbf{F}_n = m\mathbf{g} \sin \gamma_N$ , kolmá na zložku  $\mathbf{F}_N$ , leží v dotykovej rovine (18) vo vektore  $(\mathbf{N}_n)_i = [-z_x; -z_y; -(z_x^2 + z_y^2)]$  v smere dotykovej k spádovej krivke orientovanej na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$  (obr. 4, časť b). Zmenšená o trenie  $T_r$  na hodnotu  $\mathbf{F}_n - T_r$ , kde  $T_r = f \mathbf{F}_N$ , a kde  $f$  je koeficient trenia, má tvar  $\mathbf{F}_n = m\mathbf{g} (\sin \gamma_N - f \cos \gamma_N)$ , pričom generovaním zmeny potenciálnej energie  $W_p$  na kinetickú energiu  $W_k$ , výsledne indukujú pohyb hmotnej častice  $m$  v smere spádovej krivky na stranu klesajúcej výšky  $z$ . Pre začiatok alebo koniec indukcie zložky  $\mathbf{F}_n$  na georeliéfe teda pre hmotnosť častice  $m$  pri hodnote  $f$  platí určitá hraničná (prahová) hodnota uhla sklonu  $(\gamma_N)_{Tr} = \arctg (|-grad z|_{Tr})$ , pre ktorú platí  $[\sin (\gamma_N)_{Tr} - f \cos (\gamma_N)_{Tr}] = 0$ , z čoho pre ňu plynie, že  $\mathbf{F}_n = 0$ . Hmotná častica  $m$  sa na spádovej krivke v úsekoch s  $\omega > 0$  pri hodnotách  $\gamma_N < f = \tg (\gamma_N)_{Tr}$  buď ešte nezačína v smere klesajúceho skalára výšky  $z$  pohybovať, alebo sa v úsekoch  $\omega < 0$  spádovej krivky pri hodnotách  $\gamma_N < f = \tg (\gamma_N)_{Tr}$  už prestáva pohybovať. Teda na spádovej krivke v úsekoch s  $\omega > 0$  s hodnotami  $\gamma_N < f$ , je  $\mathbf{F}_n - T_r < 0$ , v úsekoch s inflexným bodom a s hodnotami  $\gamma_N > f$ , je  $\mathbf{F}_n - T_r > 0$  a v úsekoch  $\omega < 0$  spádovej krivky pri hodnotách  $\gamma_N < f$  je znovu  $\mathbf{F}_n - T_r < 0$ . Zložky  $\mathbf{F}_N, \mathbf{F}_n$  vyjadrené v kartézskej súradnicovej ústave  $\langle O, x, y, z \rangle$  majú na TPG tvar  $\mathbf{F}_N = (\mathbf{F}_N)_x + (\mathbf{F}_N)_y + (\mathbf{F}_N)_z = (|\mathbf{F}| \cos^2 \gamma_N \cos A_N) \mathbf{i} + (|\mathbf{F}| \cos^2 \gamma_N \sin A_N) \mathbf{j} + (|\mathbf{F}| \cos^2 \gamma_N) \mathbf{k}$ ;  $\mathbf{F}_n = (\mathbf{F}_n)_x + (\mathbf{F}_n)_y + (\mathbf{F}_n)_z = (|\mathbf{F}| \sin \gamma_N \cos \gamma_N \cos A_N) \mathbf{i} + (|\mathbf{F}| \sin \gamma_N \cos \gamma_N \sin A_N) \mathbf{j} - (|\mathbf{F}| \sin^2 \gamma_N) \mathbf{k}$ . Zmena absolútnej hodnoty indukujúcej sily  $|\mathbf{F}_n|$  o hodnotu  $d|\mathbf{F}_n|$  v smere spádovej krivky  $dn$  je daná vzťahom

$$\frac{\partial}{\partial n} (|\mathbf{F}_n|) = |\mathbf{F}| (K_N)_n \equiv |\mathbf{F}| \omega,$$

v čom zároveň spočíva nielen geometrický, ale aj fyzikálny význam normálovej krivosti  $(K_N)_n \equiv \omega$  (20), definovanej v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$  (Krcho 1973, 1990 a 2001 a Minár 1995/1996). *Koniec poznámky 4.*

Z poznámky 4 vyplýva dôležitý význam fyzikálneho aspektu morfometrických veličín (20), (21) definovaných vzhľadom na tiažové pole Zeme a kvantitatívne charakterizujúcich geometrické formy TPG vzhľadom na toto pole.

*Normálové formy  $\mathbf{F}_n \subset \mathbf{F}_C$  georeliéfu* boli v každom bode  $*A_i(x_i, y_i, z_i) \in *E_{RF}$  na TPG a v jemu zodpovedajúcom bode  $A_i[(x_i, y_i), z_i] \in E_{RF}$  v skalárnej báze  $(x, y)$  definované vzhľadom na tiažové pole *jedným morfometrickým ukazovateľom*  $(K_N)_n \equiv \omega$ .

*Normálové formy*  $F_t \subset F_C$  boli definované iba jedným parametrom, a to normálovou krivosťou  $(K_N)_t$  v smere dotyčníc  $t$  (21) k vrstevniciam, smerovo orientovaných jednotkovým vektorom  $-\mathbf{t}^\sigma$  vyjadreným vzhľadom na smer vektora – grad  $z$ .

*Horizontálne formy*  $F_{K_r} \subset F_C$  boli na TPG vzhľadom na tiažové pole na TPG a v jej skalárnom poli definované tak isto jedným parametrom, a to horizontálnou krivosťou  $K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N$  v smere dotyčníc  $t$  k vrstevniciam (16b) smerovo orientovaných jednotkovým vektorom  $-\mathbf{t}^\sigma$  vyjadreným vzhľadom na orientáciu vektora – grad  $z$  hodnotou normálovej krivosti  $K_r = 0$ . Detailne je tento problém analyzovaný v prácach Krcha (1973, 1990 a 2001).

Celkové geometrické formy georeliéfu definované vzhľadom na tiažové pole, ich interpretácia a fyzikálny význam

*Celkové základné geometrické formy georeliéfu* boli v práci Krcha (1973) vyjadrené množinou

$$F = \{F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}\}, \quad (24)$$

boli definované na základe dvojice morfometrických veličín, vyjadrených v tvare usporiadaných dvojíc  $[\pm(K_N)_n \equiv \omega, \pm(K_N)_t]$ ,  $[\pm(K_N)_n \equiv \omega, \pm K_r = (K_N)_t / \sin \gamma_N]$ . V zhode s nimi bol formulovaný abstraktný priestor uvažovaný v súradnicovej sústave  $\langle O; \omega, (K_N)_t \rangle$ , resp.  $\langle O; \omega, K_r \rangle$ . Počiatok  $O$  je priradený ku každému bodu  $*A_i(x_i, y_i, z_i) \in *E_{RF}$  na TPG a jemu zodpovedajúcemu bodu  $A_i[(x_i, y_i) z_i] \in E_{RF}$  v skalárnej báze  $(x, y)$  – Krcho (1973, 1986 a 1990).

*Poznámka 5.* Veličiny  $(K_N)_n \omega$ ,  $(K_N)_t$ ,  $K_r$  majú teda v zhode s fyzikálnymi kritériami v jednotlivých kvadrantoch I.Q, II.Q, III.Q, IV.Q tohto priestoru nasledujúce znamienka:

I .Q:  $F_{XX} [(K_N)_n \equiv \omega > 0, (K_N)_t > 0]$  resp.  $F_{XX} [(K_N)_n \equiv \omega > 0, K_r > 0]$

II .Q:  $F_{KX} [(K_N)_n \equiv \omega < 0, (K_N)_t > 0]$  resp.  $F_{KX} [(K_N)_n \equiv \omega < 0, K_r > 0]$

III .Q:  $F_{KK} [(K_N)_n \equiv \omega < 0, (K_N)_t < 0]$  resp.  $F_{KK} [(K_N)_n \equiv \omega < 0, K_r < 0]$

IV .Q:  $F_{XK} [(K_N)_n \equiv \omega > 0, (K_N)_t < 0]$  resp.  $F_{XK} [(K_N)_n \equiv \omega > 0, K_r < 0]$ .

Jednotlivé kvadranty vyjadrujú pritom jednotlivé celkové geometrické formy z množiny (26). V usporiadaných dvojiciach  $[(K_N)_n \equiv \omega, (K_N)_t]$  resp.  $[(K_N)_n \equiv \omega, K_r]$  je v priestore  $\langle O; \omega, (K_N)_t \rangle$  resp.  $\langle O; \omega, K_r \rangle$  pre hodnoty  $[(K_N)_n \equiv \omega = 0$ , alebo pre  $(K_N)_t = 0$ , resp.  $K_r = 0$ , definovaná aj širšie formulovaná podmnožina prvkov  $\{F_{XL}, F_{LX}, F_{KL}, F_{LK}, F_{LL}\} \subset F$  pričom index  $L$  vyjadruje pre tieto hodnoty lineárnosť foriem. Podrobne je tento problém v nadväznosti na prácu Krcha (1973) uvedený v jeho ďalších prácach (Krcho 1990 a 2001). *Koniec poznámky 5.*

Jednotlivé celkové formy z množiny (24) sú navzájom od seba oddelené izočiarami  $(K_N)_n \equiv \omega = 0$ ,  $(K_N)_t = 0$ , resp.  $K_r = 0$ , kde izočiaru  $(K_N)_n \equiv \omega = 0$  je určená rovnicou

$$z_{xx} z_x^2 + 2z_{xy} z_x z_y + z_{yy} z_y^2 = 0, \quad (25)$$

a izočiaru  $(K_N)_t = 0$ , resp.  $K_r = 0$  je určená rovnicou

$$z_{xx}z_y^2 + 2z_{xy}z_xz_y + z_{yy}z_x^2 = 0. \quad (26)$$

Základné formy georeliéfu (24) reprezentované prvkami ( $F_{XX}$ ,  $F_{KX}$ ,  $F_{KK}$ ,  $F_{XK}$ )  $\in F$  (24) majú pritom v zmysle poznámky 5 podľa jednotlivých kvadrantov nasledujúci význam:

a) Q:  $F_{XX}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ ,  $(K_N)_t > 0$ ] resp.  $F_{XX}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ ,  $K_r > 0$ ] – konvexno-konvexné formy; vzhľadom na  $(K_N)_n \equiv \omega > 0$  s rastúcou hodnotou  $\gamma_N$  o  $d\gamma_N/dn > 0$  sila  $F_n$  indukujúca pohyb sa zväčšuje, a teda zrýchľuje toky v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Zároveň vzhľadom na  $(K_N)_t > 0$ , resp.  $K_r > 0$  a na  $dA_N/dt > 0$  toky v smere spádových kriviek divergujú, takže toky sa v smere spádových kriviek urýchľujú a zároveň rozptyľujú;

b) Q:  $F_{KX}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ ,  $(K_N)_t > 0$ ] resp.  $F_{KX}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ ,  $K_r > 0$ ] – konkávno-konvexné formy (*duto-vypuklé*) formy; vzhľadom na  $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ , s klesajúcou hodnotou  $\gamma_N$  o  $d\gamma_N/dn < 0$  sila  $F_n$  indukujúca pohyb sa znižuje a toky v smere spádových kriviek sa na stranu klesajúceho skalára  $z$  spomaľujú. Zároveň vzhľadom na  $(K_N)_t > 0$ , resp.  $K_r > 0$  a na  $dA_N/dt > 0$ , toky v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$  divergujú; toky v smere spádových kriviek sa teda spomaľujú a zároveň rozptyľujú;

c) Q:  $F_{KK}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ ,  $(K_N)_t < 0$ ], resp.  $F_{KK}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ ,  $K_r < 0$ ] – konkávno-konkávne (*vyduto-vyduť*) formy; vzhľadom na  $(K_N)_n \equiv \omega < 0$ , s klesajúcou hodnotou  $\gamma_N$  o  $d\gamma_N/dn < 0$  sa sila  $F_n$  indukujúca pohyb znižuje a toky v smere spádových kriviek sa na stranu klesajúceho skalára  $z$  spomaľujú; vzhľadom na  $(K_N)_t < 0$ , resp.  $K_r < 0$  a na  $dA_N/dt < 0$  nastáva konvergencia tokov v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$ , takže toky sa v smere spádových kriviek spomaľujú a zároveň konvergujú (sústreďujú);

d) Q:  $F_{XK}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ ,  $(K_N)_t < 0$ ], resp.  $F_{XK}$  [ $(K_N)_n \equiv \omega > 0$ ,  $K_r < 0$ ] – konvexno-konkávne (*vypuklo-vyduť*) formy georeliéfu; vzhľadom na  $(K_N)_n \equiv \omega > 0$  sa sila  $F_n$  indukujúca pohyb s rastúcou hodnotou  $\gamma_N$  o  $d\gamma_N/dn > 0$  zväčšuje a zrýchľuje toky v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$ . Vzhľadom na  $(K_N)_t < 0$ , resp.  $K_r < 0$ , a teda na  $dA_N/dt < 0$  (t. zn. na sústreďovanie tokov), toky v smere spádových kriviek na stranu klesajúceho skalára  $z$  konvergujú, takže eróznio-denudačné procesy sa v smere spádových kriviek urýchľujú a zároveň konvergujú (sústreďujú).

Uvedené štyri základné celkové geometrické formy georeliéfu boli v zmysle poznámky 5 podrobne charakterizované v práci Krcha (1973) a ďalej rozvinuté tým istým autorom (Krcho 1986, 1990, 1992/1993 a 2001). Tieto geometrické formy sú teda z fyzikálneho hľadiska v tiažovom poli Zeme vyjadrené v smere toku látok a energie z vyššej geopotenciálnej hladiny gravitačného skalárneho poľa na nižšiu hladinu. Nadobudli tak vzhľadom na tiažové pole Zeme okrem geometrického významu zároveň aj geofyzikálny význam.

*Poznámka 6.* Množina geometrických foriem  $F$  vyjadrená vzhľadom na tiažové pole Zeme je priestorovo čiastočne odlišná od Gaussových geometrických foriem definovaných na základe Dupinovej indikatrix množinou eliptických a hyperbolických bodov, oddelených od seba nulovou izočiarou druhej Gaussovej diferenciálnej formy  $D_2=0$ , čo je podrobne analyzované v prácach Krcha (1990, 1992/1993 a 2001) a Krcha a Benovej (2004). *Koniec poznámky 6.*

## Geometrické formy georeliéfu definované čisto z matematického hľadiska a ich interpretácia

Všetky geometrické formy TPG definované na základe normálových krivostí  $(K_N)_n \equiv \omega$ ,  $(K_N)_t$  a horizontálnej krivosti  $K_r$  iba z matematického hľadiska, daného orientáciou dvojice (grad  $z$ ,  $\mathbf{N}$ ) majú opačnú interpretáciu, lebo na pravej strane vzťahov (20), (21) a (22) chýba znamienko mínus. V dvojici vektorov (grad  $z$ ;  $\mathbf{N}$ ) je totiž v tomto prípade výškový gradient grad  $z$  (8b) v skalárnej báze  $(x, y)$  v smere spádových kriviek orientovaný vždy na stranu stúpajúceho skalára výšky  $z$  a vektor normály  $\mathbf{N}$  (11c) je orientovaný na „vnútornú“ stranu TPG.

V tomto zmysle sú vzhľadom na orientáciu dvojice vektorov (grad  $z$ ;  $\mathbf{N}$ ) striktne vyjadrené aj uvedené rovnice (9), (11), str. 661 z citovanej práce Mitásovej a Hofierku (1993). Vzhľadom na opačné znamienka v týchto uvedených vzťahoch (9), (11), str. 661 oproti vzťahom (20), (21) a (22) sú teda oproti orientácii dvojice  $(-\text{grad } z, -\mathbf{N})$ , definované opačne. Krivosti uvažované čisto z matematického hľadiska majú oproti krivostiam daným vzťahmi (20), (21), (22) opačné znamienka a aj opačnú interpretáciu geometrických foriem, a to tak v normálových, horizontálnych, ako i v celkových geometrických formách.

Pôvodne definované celkové formy georeliéfu  $\mathbf{F} = \{F_{XX}, F_{KX}, F_{KK}, F_{XK}\}$  (24) vyjadrené na základe usporiadaných dvojíc krivostí  $[(K_N)_n \equiv \omega, K_r]$ ,  $[(K_N)_n \equiv \omega, (K_N)_t]$ , orientovaných na stranu klesajúceho skalára výšky  $z$ , sú v takomto prípade definované opačne, na stranu stúpajúceho skalára výšky  $z$ , teda ako  $\mathbf{F} = \{F_{KK}, F_{XK}, F_{XX}, F_{KX}\}$ .

Z matematického hľadiska sú síce striktne korektné, avšak ich interpretácia bez zavedenej podmienky c) v tretej kapitole je fyzikálne nekorektná a významovo zavádzajúca.

Budú teda pomenované a interpretované presne opačne. *To sa následne prejavuje aj v GIS-technológiách (SURFER) tak, že oproti pôvodnej exaktnej formulovanej definícii vzhľadom na tiažové pole Zeme sú geometrické formy formulované navzájom presne s opačnými znamienkami normálových krivostí.*

## ZÁVER

V práci je analyzovaný problém správneho pomenovania a z neho vyplývajúcej správnej interpretácie geometrických foriem georeliéfu vyjadrených na hladkej TPG v tiažovom poli Zeme. Preto je TPG zároveň analyzovaná v tiažovom poli Zeme z fyzikálneho hľadiska, ako výškové pole kinetickej a potenciálnej energie. Analyzované sú negatívne až zavádzajúce dôsledky interpretácie ináč matematicky principiálne korektnej definície týchto foriem, ak nie je pri nich zohľadnená dôležitá fyzikálna bilancia potenciálnej a kinetickej energie tokov v smere spádových kriviek pri eróznodenulačných transportných a akumulčných procesoch v tiažovom poli.

Ako je ukázané, matematicky korektné formulovaná geometria TPG musí byť súčasne aj fyzikálne korektná. V opačnom prípade to vedie k interpretačným paradoxom, na ktoré bolo potrebné poukázať.

*Práca vznikla na základe podpory udelenej Agentúrou na podporu výskumu a vývoja v rámci projektu APVV-0326-11.*

## LITERATÚRA

- EVANS, I. S. (1972). General geomorphometry derivatives of altitude and descriptive statistics. Spatial analysis in Geomorphology. In Chorley, R. J., ed. *Spatial Analysis in Geomorphology*. New York (Harper and Row), pp. 17-90.
- FLORINSKY, I. V. (2009). Computation of the third-order partial derivatives and derivation function from a digital elevation model. *International Journal of Geographical Information Science*, 23, 213-231.
- JENČO, M. (1992/93). The morphometric analysis of georelief in terms of a theoretical conception of the complex digital model of georelief. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Geographica*, 33, 133-153.
- JENČO, M., (2010). Vyhľadávanie predĺžených naklonených objektov metódou morfolologickej segmentácie svahu. *Kartografické listy*, 18, 67-75.
- JENČO, M., PACINA, J., SHARY, P. A. (2009). Terrain skeleton and local morphometric variables geosciences and computer vision technique. In Hořák, J., et al., ed. *Advances in Geoinformation Technologies 2009*. Ostrava (VŠB-TU), pp. 57-76.
- KRCHO, J. (1964a). Morphometric analysis of the slope conditions of the Košice Basin. *Acta Geologica et Geographica Universitatis Comenianae, Geographica* 4. *The geography of the region of the East-Slovakian Ironworks*, 4, 23-44.
- KRCHO, J. (1964b). K problému zostrojenia máp gradientov spádu, máp izoklín, izalumklín a izalumchrón. *Geografický časopis*, 16, 61-75.
- KRCHO, J. (1973). Morphometric analysis of relief on the basis of geometric aspect of field theory. *Acta Geographica Universitatis Comenianae, Geographica physica*, 1, 7-233.
- KRCHO, J. (1986). Geometrické formy georeliéfu a ich hierarchické úrovne. *Geografický časopis*, 38, 210-235.
- KRCHO, J. (1990). *Morfometrická analýza a digitálne modely georeliéfu*. Bratislava (Veda).
- KRCHO, J. (1992/93). Georelief and its cartographic modelling by complex digital model (CDM) from geographical information system (GIS) point of view. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Geographica*, 33, 3-132.
- KRCHO, J. (2001). *Modelling of georelief and its geometrical structure using DTM: positional and numerical accuracy*. Bratislava (Q111 Publishers).
- KRCHO, J., BENOVA, A. (2004). Georeliéf a jeho geometrická štruktúra: modelovanie georeliéfu s parametrom a bez parametra času. *Geografický časopis*, 56, 3-32.
- MINÁR, J. (1992). The principles of the elementary geomorphological. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Geographica*, 33, 185-198.
- MINÁR, J. (1995/96). Niektoré teoreticko-metodologické problémy geomorfológie vo väzbe na tvorbu komplexných geomorfologických máp. *Acta Facultatis Rerum Naturalium Universitatis Comenianae, Geographica*, 36, 3-125.
- MINÁR, J. (1999). Morphometric analysis of the fields and its utilization in geology. *Geografický časopis*, 51, 261-277.
- MINÁR, J., EVANS, I. S. (2008). Elementary forms for land surface segmentation: the theoretical basis of terrain analysis and geomorphological mapping. *Geomorphology*, 95, 236-259.
- MINÁR, J., EVANS, I. S., KRCHO, J. (2013a). Geomorphometry: quantitative land surface analysis. In Shroder, J., Switzer, A. D., Kennedy, D. M., eds. *Treatise on Geomorphology*. (Vol. 14: *Methods in Geomorphology*). San Diego (Academic Press), pp. 22-34.
- MINÁR, J., JENČO, M., EVANS, I. S., MINÁR, J. (Jr.), KADLEC, M., KRCHO, J., PACINA, J., BURIAN, L., BENOVA, A. (2013b). Third-order geomorphometric variables (derivatives): definition, computation and utilization of changes of curvatures. *International Journal of Geographical Information Science*, 27, 7, 1381-1402.

- MITÁŠOVÁ, H., HOFIERKA, J. (1993). Interpolation by regularized spline with tension: II. application to terrain modeling and surface geometry analysis. *Mathematical Geology*, 25, 657-669.
- SHARY, P. A. (1995). Land surface in gravity points classification by a complete system of curvatures. *Mathematical Geology*, 27, 373-390.
- SHARY, P. A., SHARAYA, L. S., MITUSOV, A. V. (2002). Fundamental quantitative methods of land surface analysis. *Geoderma*, 107, 1-32.
- SHARY, P. A., STEPANOV, I. N. (1991). On the second derivative method in geology. *Doklady Akademii 555 Nauk SSSR*, 319, 456-460.
- SCHMIDT, J., EVANS, I. S., BRINKMANN, J. (2003). Comparison of polynomial models for land surface curvature calculation. *International Journal of Geographical Information Science*, 17, 797-814.
- REKTORYS, K. (1969). *Survey of applicable mathematics*. Cambridge, London (MIT Press, MA, Iliffe Books Ltd.).
- ŠALAMON, B. (1961). Skalární pole na geometrických mapách vyšetřované na podkladě vlastností jeho interpolační plochy. *Kartografický přehled*, 6, 1-6.
- ŠALAMON, B. (1963a). Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung (1. Teil). *Studia geophysica et geodaetica*, 7, 93-107.
- ŠALAMON, B. (1963b). Das typische Isoliniengrundfeld und seine Anwendung (2. Teil). *Studia Geophysica et Geodaetica*, 7, 313-329.

Jozef Krcho, Alexandra Benová

## THE PROBLEM OF CORRECT AND EXACT DEFINITION OF GEOMETRICAL FORMS OF GEORELIEF REGARDING THE EARTH'S GRAVITATIONAL FIELD

This paper discusses the problem of the definition of geometric forms of georelief from the mathematical and physical viewpoints. Discussion developed following the papers by Jenčo et al. (2009), Jenčo (2010) and Matášová and Hofierka (1993). However, this problem is also relevant from the viewpoint of the GIS technologies, in which the signs of profile curvatures differ (for example SURFER and GRASS). The problem of georelief geometric forms was formulated a long time ago on the basis of geometric aspect of fields theory in the paper J. Krcho (1973) preceded by Krcho (1964a and 1964b) and later Krcho (1986 and 1990). Physical criteria for geometric forms were established from the viewpoint of the geometric aspect of fields theory, where the vector of normal line  $\mathbf{N} = (-z_x, -z_y, +1)$  was oriented to the "outer" side of georelief and its corresponding negative altitude gradient  $-\text{grad } z = (-z_x, -z_y)$  was oriented to the side of the descending scalar of altitude  $z$ , which means down the slope ( $z_x, z_y$  are first partial derivatives). Geometric forms were thus expressed considering the "outer" side of georelief, in the direction of the material flow from the higher to the lower energy level. Negative signs (-) corresponded to it in the derived relations for profile curvatures  $(K_N)_n$ ,  $(K_N)_t$  and plan curvature  $K_r$  on their left side.

However, in the later paper of Mitášová and Hofierka (1993) the georelief geometric forms, in contradiction to the original papers by Krcho (1973) and others, were expressed correctly on the basis of the mathematical criteria of differential geometry citing the paper of Rektorys (1969). The vector of the normal line  $\mathbf{N} = (z_x, z_y, -1)$  although oriented in the sense of these criteria to the "inner"

side of surface and altitude gradient  $\text{grad } z = (z_x; z_y)$ , is oriented to the side of the ascending scalar  $z$ , which means up the slope. Geometric forms (convexity, concavity) were so in their case expressed regarding the “inner” side of the surface, which in derived relations (9), (11), pp. 661 for profile curvatures in paper Mitášová and Hofierka (1993) on their left side comport with positive signs. However, the resulting classification of forms was shown to agree with these criteria from the point of view of physics (Krcho 1973) and at the same time in the sense of the derived relations (9), (11), pp. 661, negative marks have been kept (Fig. 2 in their work). However, this meant that, according to the listed criteria, an unclear classification of geometrical forms was created.

The papers that followed, (Jenčo et al. 2009 and Jenčo 2010) were based on these postulates. They thoroughly accepted these criteria, and interpreted and classified the geometrical forms matching these criteria correctly from the “inner” side of the surface, which means, unlike the paper of Mitášová and Hofierka (1993) formally correct in an adverse manner. However, this meant that from the geomorphologic point of view (direction of substance flow) taking place on the “outer” side of the surface in the direction of flow, paradoxical conclusions were drawn.

Therefore this problem is now examined again and compared with the original papers (Krcho 1964a, 1964b, 1973 to 1990). When taken in context, it is shown that the geometry of georelief from the point of view of physics is linked with potential and kinetic energy  $W_p, W_k$ , in which the geomorphological processes (substance flow) take place on the surface of georelief in the direction of slope  $-\text{grad } z = (-z_x; -z_y)$  from the higher tier of potential energy  $W_p$  to the lower whilst changing itself into kinetic energy  $W_k$ . That makes the geometrical forms (convexity, concavity) equal to the process of kinetic energy  $W_k$  defined taking into consideration the “outer” side of the surface. In these defined convex forms normal curvature equals  $(K_N)_n > 0$ , so the substance flow accelerates in the direction of slope  $[(K_N) > 0 \wedge (\partial/\partial n) | -\text{grad } z | = (d^2z/dn^2 > 0)]$  and normal curvature in concave forms equals  $[(K_N) < 0 \wedge (\partial/\partial n) | -\text{grad } z | = (d^2z/dn^2 < 0)]$ , so the substance flow decelerates in the direction of the slope. This is expressed at the top of Fig. 1 and also in Fig. 2. Kinetic energy  $W_k$  on the “outer” side of georelief with the negative change of altitude  $z$  in the direction  $-\text{grad } z = (-z_x; -z_y)$ , which means in the direction of decreasing scalar  $z$ , increases so its gradient  $\text{grad } W_k = mg (-\text{grad } z)$  is oriented towards the side of decreasing scalar  $z$ .

Geometric forms of georelief expressed considering the “inner” side  $[N = (z_x; z_y; -1); \text{grad } z = (z_x; z_y)]$  are defined in the opposite way to previous forms. This is expressed in the bottom of Fig. 1 as well as in Fig. 2. The geometrical forms defined from the “inner” side of the surface, in consideration of balance of both energies  $W_p, W_k$  relate to the potential energy  $W_p = mgz = mg[f(x, y)]$ , which increases in the direction of the ascending scalar of the height  $z$ . The gradient of the potential energy  $\text{grad } W_p = mg(\text{grad } z)$  is then in the field of potential energy in connection with the increase  $W_p$  oriented towards the side of ascending scalar  $z$ . Therefore, geometrical forms defined this way relate much more to the used potential energy which represents the activity needed to lift the current (recent) mountain massif.